Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Братский педагогический колледж

федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования

«Братский государственный университет»

МАТЕМАТИКА

Методическое рекомендации по теме «Функции»

для студентов I курса
очной и заочной форм обучения
специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование
44.02.01 Дошкольное образование
40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Автор: Е.П. Шаталова

Братск, 2021

Математика. Методические рекомендации по теме «Функции» / Сост. Е.П. Шаталова – Братск.: БПК ФГБОУ ВО «БрГУ», 2021 г. – 21 с.

В методических рекомендациях предлагаются теоретический материал по изучению степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций. Предназначено для студентов изучающих математику, в качестве справочного материала и может быть использовано для работы в аудитории под руководством преподавателя, так и при самостоятельной подготовки.

Печатается по решению научно-методического совета
Братского педагогического колледжа ФГБОУ ВО «БрГУ»
665709, г. Братск, ул. Макаренко 40

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Раздел «Математический анализ» учебной дисциплины «Математика» представлен тремя основными темами: «Элементарные функции», «Производная» и «Интеграл». Содержание этого раздела направлено на получение обучающимися конкретных знаний о функции, как важнейшей модели описания и исследования разнообразных реальных процессов. Изучение степенной, показательной, логарифмической и тригонометрических функций продолжает знакомство обучающихся с основными элементарными функциями. Помимо овладения непосредственными умениями определять значения функции по значению аргумента при различных способах задания функции, строить графики, описывать по графику поведение и свойства функции, находить наибольшее и наименьшее значение, решать простейшие уравнения и неравенства обучающиеся используют приобретенные знания и умения в практической деятельности, формируют запас геометрических представлений, лежащих в основе объяснения правомерности стандартных и эврестических приемов решения задач.

Определение функции и ее характеристики

Функция - зависимость переменной **у** от переменной **х,** если каждому значению **х** соответствует единственное значение **у**.

Переменная х - независимая переменная или аргумент.

Переменная у - зависимая переменная

Значение функции – значение **у**, соответствующее заданному значению **х**.

Постоянная функция - функция, заданная формулой **y=b,** где **b**-некоторое число. Графиком постоянной функции y=b является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку (0;b) на оси ординат

Прямая пропорциональность - функция, заданная формулой **y=kx,** где $к\neq0$. Число **k** называется **коэффициентом пропорциональности**.

Линейная функция - функция, которая задана формулой **y=kx+b**, где **k** и **b**-действительные числа. Если в частности, **k=0**, то получаем постоянную функцию **y=b**; если **b=0**, то получаем прямую пропорциональность **y=kx**.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, то есть по оси абсцисс откладываются значения переменной **х**, а по оси ординат откладываются значения переменной **у**. Для построения графика функции необходимо знать свойства функции.

Область определения функции - это множество всех допустимых действительных значений аргумента **x**(переменной **x**), при которых функция **y = f(x)** определена.

Область значений функции - это множество всех действительных значений **y**, которые принимает функция.

В элементарной математике изучаются функции только на множестве действительных чисел.

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции. Для любых $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$**,** таких, что $\mathbf{x_1 < x_2}$, выполняется неравенство $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$**.**

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции. Для любых $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$**,** таких, что $\mathbf{x_1 < x_2}$, выполняется неравенство $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$**.**

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **х** из области определения выполняется равенство **f(-x) = f(x)**. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **х** из области определения справедливо равенство **f(-x) = -f(x)**. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция называется **ограниченной**, если существует такое положительное число М, что $|f(x)| \le M$ для всех значений х . Если такого числа не существует, то функция - **неограниченная**.

Функция f(x) - **периодическая**, если существует такое отличное от нуля число Т, что для любого х из области определения функции имеет место: $f(x+T) = f(x)$. Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

Степенная функция, ее графики и свойства

1.Степенная функция с натуральным показателем

– Степенью действительного числа **a** с натуральным показателем **n** называется число, равное произведению **n** множителей, каждый из которых равняется числу **a**.

$f(x) = x^n \ (n \in N)$ **-** называется степенной функцией с натуральным показателем.

Для дальнейшего удобства рассмотрим отдельно степенную функцию с четным показателем $f(x) = x^{2n}$ и степенную функцию с нечетным показателем $f(x) = x^{2n-1} \ (n \in N)$.

2. Свойства степенной функции с натуральным четным показателем

- Область определения - все действительные числа.
- $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$ - функция четна.
- $f(x)$ - непрерывна на всей области определения.
- Область значения - $[0, +\infty)$.
- $$f'(x) = \left(x^{2n}\right)' = 2n \cdot x^{2n-1}$$

  $$2n \cdot x^{2n-1} = 0$$

  $$x = 0$$

  Функция убывает, при x∈(−∞,0)
  и возрастает, при x∈(0,+∞).
- $f(x) \geq 0$ на всей области определения.
- $f''(x) = \left(2n \cdot x^{2n-1}\right)' = 2n(2n-1) \cdot x^{2(n-1)} \geq 0$

  Функция выпукла на всей области определения.
- Поведение на концах области определения:

  $\lim_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty$

  $\lim_{x\to+\infty} x^{2n} = +\infty$
- График (рис. 2).

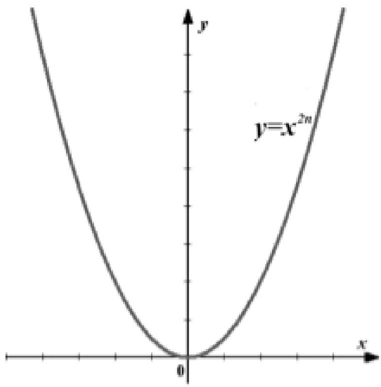


Рисунок 2. График функции f(x)=$X^{\text{2п}}$

3 Свойства степенной функции с натуральным нечетным показателем

- Область определения - все действительные числа.

- $f(-x) = (-x)^{2n-1} = -x^{2n} = -f(x)$ - функция нечетна.
- $f(x)$ - непрерывна на всей области определения.
- Область значения - все действительные числа.
- $f'(x) = \left(x^{2n-1}\right)' = (2n-1) \cdot x^{2(n-1)} \geq 0$ функция возрастает на всей области определения.
- $f(x)\,0$, при $x \in (0, +\infty)$.
-

$$f''(x) = \left((2n-1) \cdot x^{2(n-1)}\right)' = 2(2n-1)(n-1) \cdot x^{2n-3}$$

$$2(2n-1)(n-1) \cdot x^{2n-3} = 0$$

$$x = 0$$

функция вогнута, при x∈(−∞,0) и выпукла, при x∈(0,+∞)

- График

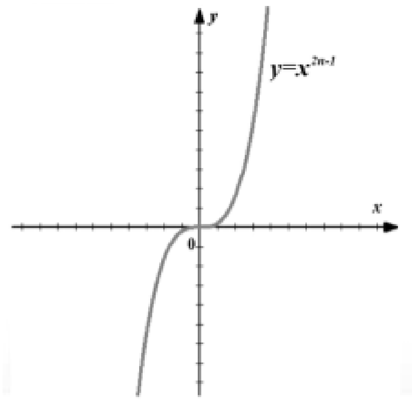


Рис. 3. График функции $f(x) = x^{2n-1}$

4 Степенная функция с целым показателем

Для начала введем понятие степени с целым показателем.

Степень действительного числа **a** с целым показателем **n** определяется формулой:

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a (n \text{ раз}), \text{при } n > 0, \\ 1, \text{при } n = 0, \\ \dfrac{1}{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a (n \text{ раз})}, \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь степенную функцию с целым показателем, её свойства и график.

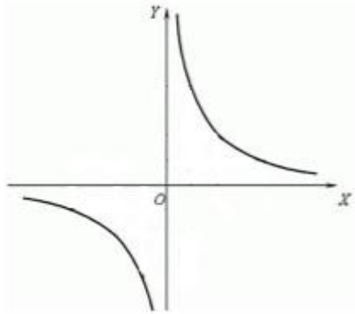
$f(x) = x^n \ (n \in Z)$ называется степенной функцией с целым показателем.

Если степень больше нуля, то мы приходим к случаю степенной функции с натуральным показателем. Его мы уже рассмотрели выше. При **n=0** мы получим линейную функцию **y=1**. Её рассмотрение оставим читателю. Осталось рассмотреть свойства степенной функции с отрицательным целым показателем.

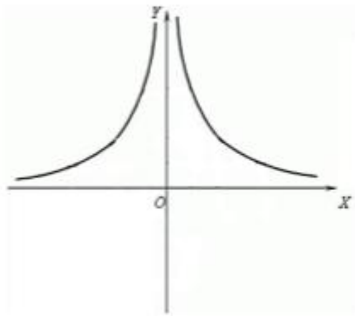
5 Свойства степенной функции с отрицательным целым показателем

- Область определения - (−∞;0) U(0;+∞).
- Если показатель четный, то функция четна, если нечетный, то функция нечетна.
- $f(x)$ - непрерывна на всей области определения.
- Область значения: Если показатель четный, то (0;+∞), если нечетный, то (−∞,0)(0,+∞).
- При нечетном показателе функция убывает, при x∈(−∞,0) U(0,+∞). При четном показателе функция убывает при x∈(0,+∞). и возрастает, при x∈(−∞,0).
- $f(x) \geq 0$ на всей области определения.

– График (рис. 4).



При нечетном показателе



При четном показателе

6 Степенная функция с рациональным и иррациональным показателем

– Степень действительного числа **a** с рациональным показателем **n** определяется формулой: $a^r = \sqrt[n]{a^m}$

– $f(x) = x^r \ (r \in Q)$ называется степенной функцией с рациональным показателем.

– Степень положительного числа а с иррациональным показателем α называется выражение вида aα, значение которого равно пределу последовательности **aα0, aα1, aα2,…,** где **α0, α1,α2** последовательные десятичные приближения иррационального числа **α.**

– $f(x) = x^r \ (r \in J)$ называется степенной функцией с иррациональным показателем.

Приведем графики степенных функций с рациональным и иррациональным показателем (рис. 5).

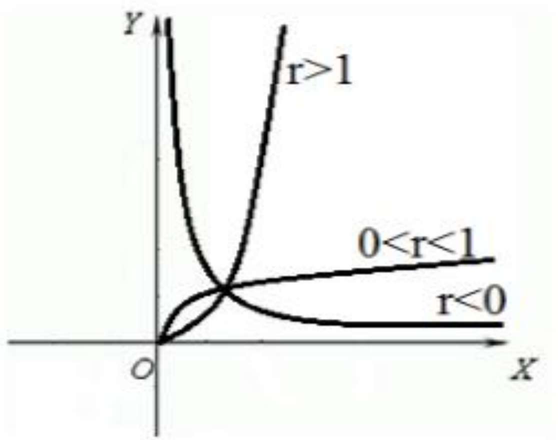
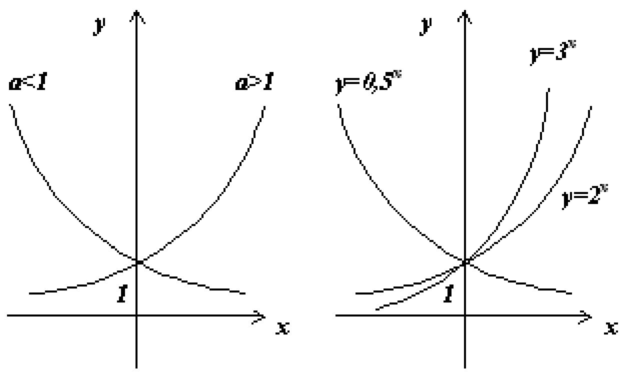


Рисунок 6. График функции $f(x) = x^r$

Показательная функция, ее графики и свойства

При **a** > **0, a ≠ 1**, определена функция **y = a** ^{x}, отличная от постоянной. Эта функция называется показательной функцией с основанием **a**.

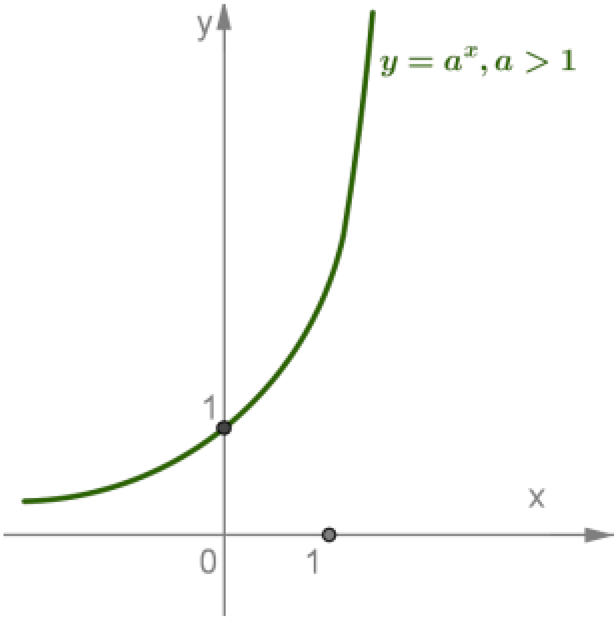
$$\boldsymbol{y = a^x}$$



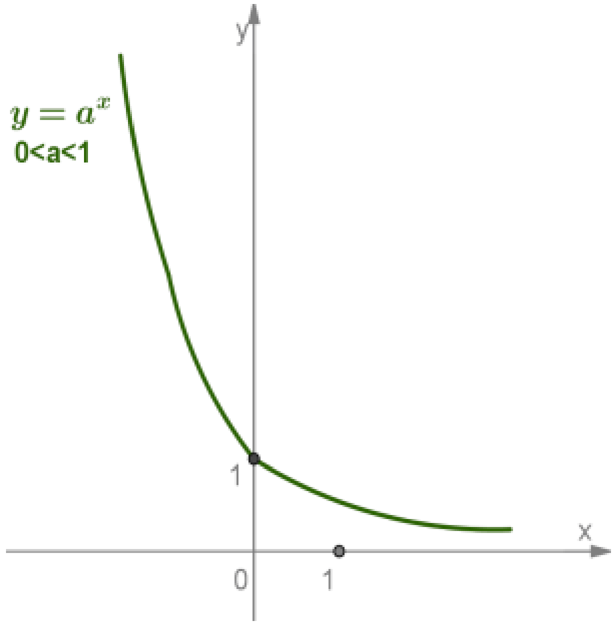
Основные свойства показательной функции y = a ^{x} **при *a* > 1:**

- Область определения функции - вся числовая прямая.
- Область значений функции – промежуток (0;+∞)(0;+∞).
- Функция строго монотонно возрастает на всей числовой прямой, то есть, если $x_1 < x_2$, то $a^{x}{}_1 < a^{x}{}_2$.
- При $x = 0$ значение функции равно 1.
- Если $x > 0$, то $a^{x} > 1$ и если $x < 0$, то $0 < a < 1$.

Графики показательных функций с основанием $0 < a < 1$ и $a > 1$



>1



$0 < a < 1$

Основные свойства показательной функции y = a ^{x} **при 0 <** ***a*** **< 1:**

- Область определения функции - вся числовая прямая.
- Область значений функции – промежуток (0;+∞)(0;+∞).
- Функция строго монотонно возрастает на всей числовой прямой, то есть, если $x_1 < x_2$, то $a^x{}_1 > a^x{}_2$.
- При $x = 0$ значение функции равно 1.
- Если $x > 0$, то $0 < a < 1$ и если $x < 0$, то $a^x > 1$.

К общим свойствам показательной функции как при 0 < а < 1, так и при а > 1 относятся:

- $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$, для всех x_1 и x_2.
- $a^{-x} = (a^x)^{-1} = \frac{1}{a^x}$ для любого x.
- $\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}$ для любого x и любого $n \in N, n \neq 1$.
- $(ab)^x = a^x b^x$ для любых a, $b > 0$; $a, b \neq 1$.
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ для любых a, $b > 0$; $a, b \neq 1$.
- $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

Логарифмическая функция, ее свойства и график

Для начала вспомним, что же вообще такое логарифм. Логарифмом числа **b∈R** по основанию **a (a>0, a≠1)** называется число **c**, в которое нужно возвести число а, чтобы получить число **b**.

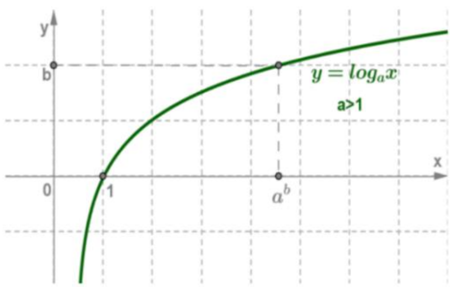
Основные свойства логарифмической функции:

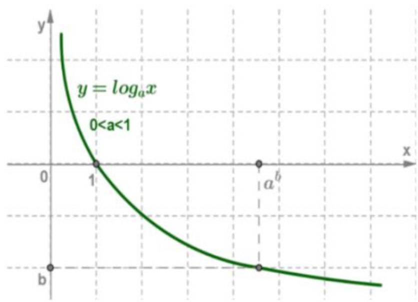
- область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел. D(f)=(0;+∞);
- множество значений логарифмической функции — множество R всех действительных чисел. E(f)=(−∞;+∞);
- логарифмическая функция на всей области определения возрастает при a>1 или убывает при 0<a<1.
- Логарифмическая функция не является ни чётной, ни нечётной;

не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений; не ограничена сверху, не ограничена снизу;

- график любой логарифмической функции y=logax проходит через точку (1;0).

Рассмотрим показательную функцию **f(x)=ax**, где **a>1**. Эта





функция возрастает, непрерывна и отображает действительную ось на интервал **(0,+∞).** Тогда, по теореме о существовании обратной непрерывной функции, у нее в множестве **Y=(0,+∞)** существует обратная функция **x=f−1(y),** которая также непрерывна и возрастает в **Y** и отображает интервал (0,+∞) на всю действительную ось.

Эту обратную функцию называют логарифмической функцией по основанию **a (a>1)** и обозначается **y=logax**.

Теперь рассмотрим показательную функцию **f(x)=ax**, где 0

Таким образом, мы определили логарифмическую функцию при всех возможных значениях основания **a**. Рассмотрим далее два этих случая отдельно.

Функция **y=logax , a>1**

Рассмотрим свойства данной функции:

1. Область определения - интервал **(0,+∞);**

2. Область значения - все действительные числа;

3. Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Точки пересечения с осями координат: С осью **Oy** пересечений нет.

При **y=0**, **logax =0, x=**1. Пересечение с осью **Ox: (1,0).**

5. Функция положительна, при **x∈(1,+∞)** и отрицательна, при **x∈(0,1) y′=1xlna**

6. $y' = \frac{1}{xlna}$

7. Точки минимума и максимума:

$$\frac{1}{xlna} = 0 - \text{корней нет}$$

Точек максимума и минимума нет.

8. Функция возрастает на всей области определения;

9. $y'' = -\frac{1}{x^2lna}$

10. Промежутки выпуклости и вогнутости:

\[-\frac{1}{x^2lna} Функция выпукла на всей области определения

11. $lim_{x\to 0}\, y = -\infty,\ lim_{x\to +\infty}\, y = +\infty,$

12. График функции (Рис. 1).

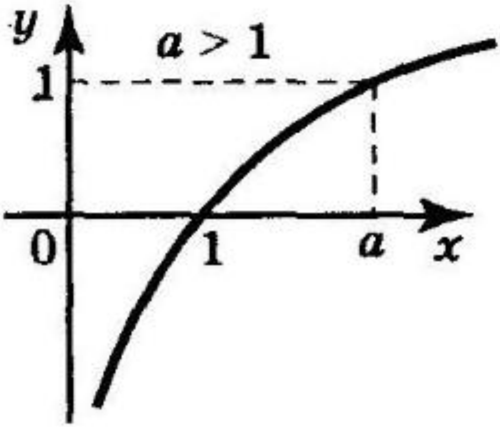


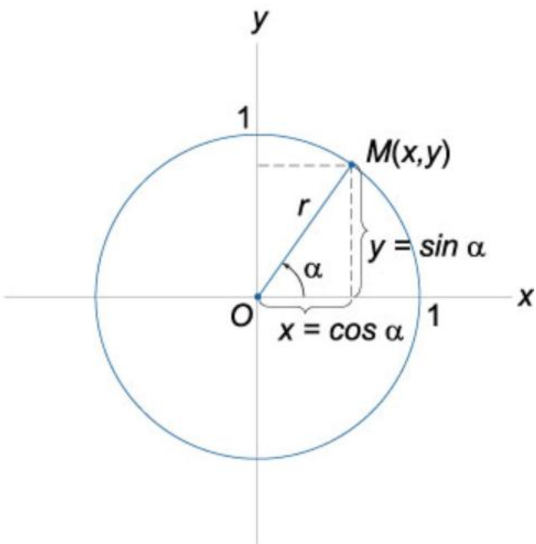
Рисунок 1. График функции **y=logax , a>1**

Тригонометрические функции их свойства и графики

Соотношения сторон и их связь с функциями:

- **Синус** — противолежащий катет к гипотенузе.
- **Косинус** — прилежащий катет к гипотенузе.
- **Тангенс** — противолежащий катет к прилежащему.
- **Котангенс** — прилежащий катет к противолежащему.
- **Секанс** — гипотенуза к прилежащему катету.
- **Косеканс** — гипотенуза к противолежащему катету.

Геометрическое определение тригонометрических функций удобно ввести с помощью **единичного круга**. На приведенном ниже



рисунке изображен круг радиусом r=1. На окружности обозначена точка M(x,y). Угол между радиус-вектором OM и положительным направлением оси Ox равен α.

Синусом угла α называется отношение ординаты y точки M(x,y) к радиусу r: sinα=y/r.

Поскольку r=1, то синус равен ординате точки M(x,y).

Косинусом угла α называется отношение абсциссы x точки M(x,y) к радиусу r: cosα=x/r

Тангенсом угла α называется отношение ординаты y точки M(x,y) к ее абсциссе x: tanα=y/x,x≠0

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы x точки M(x,y) к ее ординате y: cotα=x/y,y≠0

Секанс угла α − это отношение радиуса r к абсциссе x точки

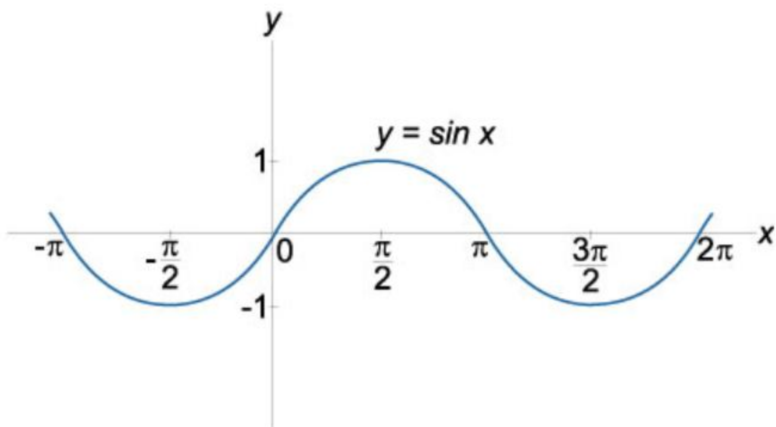
1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$.
2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.
3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot u'$.
5. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.
6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
8. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.
9. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
11. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
12. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
13. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
15. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$
16. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$
17. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$
18. $(\operatorname{th} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$

M(x,y): secα=r/x=1/x,x≠0

Косеканс угла α − это отношение радиуса r к ординате y точки M(x,y): cscα=r/y=1/y,y≠0

Свойства синуса.

- Область определения функции — **множество всех действительных чисел**: D(y)=R.
- Множество значений — интрервал [−1; 1]: E(y) = [−1;1].
- Функция y=sin(α) - нечетная: sin(−α)=−sinα.
- Функция оказывается периодической, самый маленький неотрицательный период соответствует 2π: sin(α+2π)=sin(α).
- График функции пересекает ось Ox при α=πn,n∈ Z.
- Промежутки знакопостоянства: y>0 при (2πn+0;π+2πn),n∈Z и y<0 при (π+2πn;2π+2πn), n∈Z.
- Функция является непрерывной и у нее есть производная с любым значением аргумента: (sinα)′=cosα.
- Функция y=sinα возрастает при α∈(−π/2+2πn;π/2+2πn) n∈Z, и убывает при α∈(π2+2πn;3π2+2πn), n∈Z.
- Минимум функции при α=−π/2+2πn, n∈Z, а максимум при α=π/2+2πn, n∈Z.

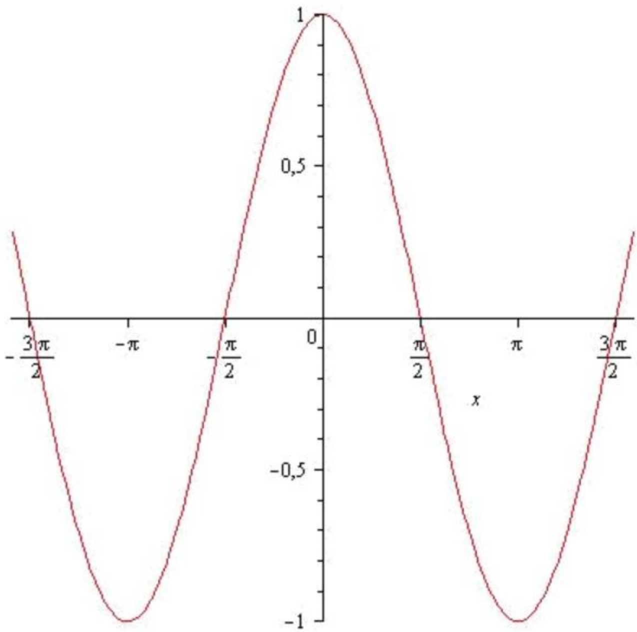


y=sinx, область определения: x∈R, область значений: −1≤sinx≤1

Свойства косинуса.

- Область определения функции — множество всех действительных чисел: D(y)=R.
- Множество значений — интервал [−1; 1]: E(y) = [−1;1].
- Функция y=cos(α) - четная: cos(−α)=cosα.
- Функция периодическая, самый маленький неотрицательный период соответствует 2π: cos(α+2π)=cos(α).

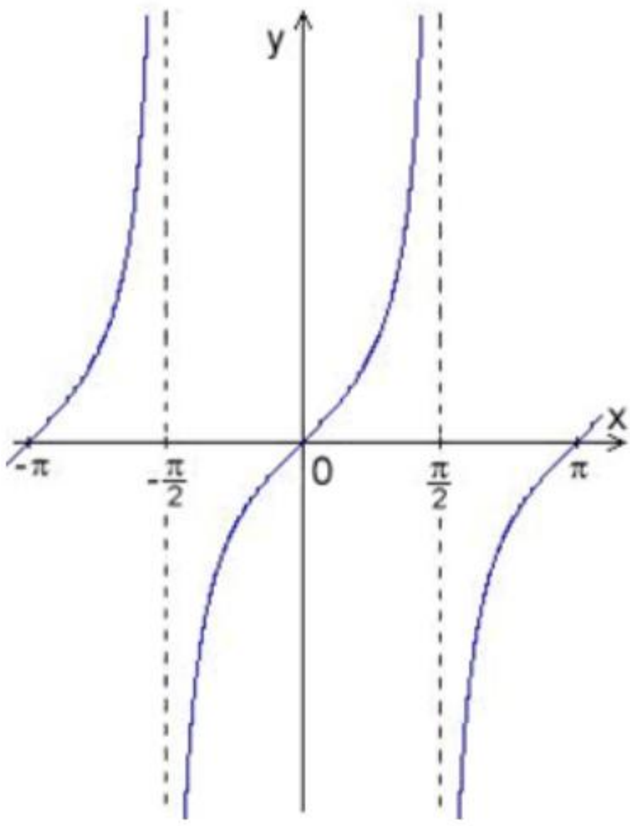
- График функции пересекает ось Ox при $\alpha=\pi/2+\pi n, n\in Z$.
- Промежутки знакопостоянства: $y>0$ при $(-\pi/2+2\pi n;\pi/2+2\pi n), n\in Z$ и $y<0$ при $(\pi/2+2\pi n;3\pi/2+2\pi n), n\in Z$.
- Функция является непрерывной, у нее есть производная с любым значением аргумента: $(\cos\alpha)'=-\sin\alpha$.
- Функция $y=\cos\alpha$ возрастает при $\alpha\in(-\pi+2\pi n;2\pi n), n\in Z$, и убывает при $\alpha\in(2\pi n;\pi+2\pi n), n\in Z$.
- У функции есть минимум при $\alpha=\pi+2\pi n, n\in Z$, а максимум при $\alpha=2\pi n, n\in Z$.



Свойства тангенса.

- Область определения функции — множество действительных чисел: $D(y)=R$, исключая числа $\alpha=\pi/2+\pi n$.
- Множество значений — множество действительных чисел: $E(y)=R$.
- Функция $y=tg(\alpha)$ - нечтная: $tg(-\alpha)=-tg\,\alpha$.
- Функция оказывается периодической, самый маленький неотрицательный период соответствует π: $tg(\alpha+\pi)=tg(\alpha)$.

- График функции пересекает ось Ox при $\alpha=\pi n, n \in Z$.
- Промежутки знакопостоянства: $y>0$ при $(\pi n;\pi/2+\pi n), n \in Z$ и $y<0$ при $(-\pi/2+\pi n;\pi n), n \in Z$.
- Функция является непрерывной, есть производная с любым значением аргумента из области определения: $(tgx)'=1/\cos^2 x$.
- Функция $y=tg\ \alpha$ возрастает при $\alpha \in (-\pi/2+\pi n;\pi/2+\pi n), n \in Z$.



Свойства котангенса.

- Область определения функции — множество действительных чисел: $D(y)=R$, исключая числа $\alpha=\pi n$.

- Множество значений — множество действительных чисел: $E(y)=R$.
- Функция $y=ctg(\alpha)$ - нечетная: $ctg(-\alpha)=-ctg\ \alpha$.
- Функция периодическая, самый маленький неотрицательный период равен π: $ctg(\alpha+\pi)=ctg(\alpha)$.
- График функции пересекает ось Ox при $\alpha=\pi/2+\pi n,\ n\in Z$.
- Промежутки знакопостоянства: $y>0$ при $(\pi n;\pi/2+\pi n),\ n\in Z$ *и* $y<0$ *при* $(\pi/2+\pi n;\pi(n+1)),\ n\in Z$.
- Функция является непрерывной, есть производная в любом значении аргумента из области определения: $(ctgx)'=-1/sin^2x$.
- Функция $y=ctg\ \alpha$ убывает при $\alpha\in(\pi n;\pi(n+1)),n\in Z$.