Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Братский педагогический колледж

федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования

«Братский государственный университет»

Элементы высшей математики

Практические рекомендации «Вычисление пределов»

для студентов
очной формы обучения
специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование

Автор: В.А. Савкина

Братск, 2020

Практические рекомендации по учебной дисциплине «Элементы высшей математике» «Вычисление пределов» для студентов специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование / Сост. В.А. Савкина - Братск.: БПК ФГБОУ ВО «БрГУ», 2020 г. – 26 с.

Сборник содержит практические рекомендации по вычислению основных пределов и применение их при решении задач.

Печатается по решению научно-методического совета
Братского педагогического колледжа ФГБОУ ВО «БрГУ»
665709, г. Братск, ул. Макаренко 40

Содержание

Введение

В связи с введением новых федеральных государственных образовательных стандартов программы многих дисциплин подверглись существенному изменению и сокращению. Именно так обстоит дело с курсом математического анализа, который является одним из базовых курсов для специалистов в области технических и естественных наук. В результате студентам все большую долю работы по освоению учебного материала приходится выполнять самостоятельно. В помощь к этому процессу и создано данное пособие. Кроме того, современное состояние науки и техники постоянно требует инновационных решений, т.е. постановки новых инженерных, технологических или научных задач и поиск путей их наиболее рационального решения. Поэтому важна способность каждого специалиста к самообразованию, к освоению нового, не заложенного в рамки стандартных учебных программ. Эта компетенция – одно из наиболее ценных качеств современного специалиста наряду с его профессиональной подготовкой. Поэтому студент обязательно должен научиться работать самостоятельно, чтобы стать широко образованным, думающим специалистом, умеющим работать с литературой, способным увидеть инженерную задачу, грамотно ее поставить и найти способ решения. Высшая математика в этом контексте важна не только как аппарат для решения задач в самых разных областях естествознания, но также является общепризнанным инструментом для развития логического мышления и вырабатывает навыки поиска решения не только чисто научных, но и практических задач. Она развивает способность видеть проблему и внутри, и извне, анализировать ее в разных аспектах и находить наиболее оптимальные пути решения. Данное пособие посвящено основным методам вычисления пределов различных функций в точке. В начале каждого раздела приводятся краткие теоретические сведения, затем разбирается довольно большое количество примеров, после которых предлагаются задачи для самостоятельного решения Пособие предназначено для студентов, изучающих методы вычисления пределов в курсе высшей математики. В нем детально изложены различные приемы вычисления пределов, подробно разобраны многочисленные примеры, даны задачи для самостоятельного решения. Наряду с типовыми приемами вычисления пределов функции в точке разобраны также методы, использующие понятие производной функции и подразумевающие владение техникой дифференцирования. Знакомиться с этими методами следует после изучения темы «Производная функции одной переменной».

Предел функции

Любой предел состоит из трех частей:

1) Всем известного значка предела $\lim$.

2) Записи под значком предела, в данном случае $x \to 1$. Запись читается «икс стремится к единице».

Чаще всего – именно x, хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные.

В практических заданиях на месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность (∞)

3) Функции под знаком предела, в данном случае $\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Сама запись $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$ читается так: «предел функции $\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$ при икс стремящемся к единице».

Разберем следующий важный вопрос – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»?

И что вообще такое «стремится»? Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**. Построим последовательность:

сначала $x = 1{,}1$, затем $x = 1{,}01$, $x = 1{,}001$, $x = 1{,}00000001$.

То есть выражение «икс **стремится** к единице» следует понимать так – «икс» последовательно принимает значения, **которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают**. Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1}=\frac{-6}{2}=-3$$

Готово.

Итак, первое правило: **Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию**.

Мы рассмотрели простейший предел, но и такие встречаются на практике, причем, не так уж редко!

Пример с бесконечностью:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)$$

Разбираемся, что такое $x\to\infty$? Это тот случай, когда x неограниченно возрастает, то есть: сначала $x=10$, п

потом $x=100$, потом $x=1000$, затем $x=10000000$ и так далее до бесконечности. А что в это время происходит с функцией $1-x$?

$1-10=-9$, $1-100=-99$, $1-1000=-999$, …

Итак: если $x\to\infty$, то функция $1-x$ стремится к минус бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$$

Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию $(1-x)$ бесконечность и получаем ответ.

Еще один пример с бесконечностью:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3)$$

Опять начинаем увеличивать x до бесконечности и смотрим на поведение функции:

$\text{если } x=10, \text{ то } 10^2-2\cdot 10-3=77$

$\text{если } x=100, \text{ то } 100^2-2\cdot 100-3=9797$

$\text{если } x=1000, \text{ то } 1000^2-2\cdot 1000-3=997997$

…

Вывод: при $x\to\infty$ функция x^2-2x-3 неограниченно возрастает:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3)=\infty$$

И еще серия примеров:

Пожалуйста, попытайтесь самостоятельно мысленно проанализировать нижеследующее и запомните простейшие виды пределов:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-99}=0$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^4+x-9}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{4^x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=0$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+7}}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12}{\ln x}=0$

Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться. В том случае, если $x\to\infty$, попробуйте построить последовательность $x=10$, $x=100$, $x=1000$. Если $x\to 0$, то $x=0{,}1$, $x=0{,}01$, $x=0{,}001$.

! Примечание*: строго говоря, такой подход с построением последовательностей из нескольких чисел некорректен, но для понимания простейших примеров вполне подойдет.*

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000000}{x}$, то все равно $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000000}{x}=0$, **так как рано или поздно «икс» начнёт принимать такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними будет самым настоящим микробом**.

Что нужно запомнить и понять из вышесказанного?

1) Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.

2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4+8x+10)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$ **и т.д.**

Более того, у предела есть очень хороший геометрический смысл.

Некоторые методы и приемы вычисления пределов функции

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда $x \to \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

Пример:

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Можно было бы подумать, что $\frac{\infty}{\infty} = \infty$, и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

Как решать пределы данного типа? Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$ Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: **для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени**.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x^2}^{\to 0}+\frac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Вот оно как, ответ $\frac{2}{3}$, а вовсе не бесконечность.

Что принципиально важно в оформлении решения?

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Обычно используют знак $(*)$, он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения. В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:

$$\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}$$

Для пометок лучше использовать простой карандаш.

<u>Пример 2</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень в числителе: 3

Максимальная степень в знаменателе: 4
Выбираем **наибольшее** значение, в данном случае четверку.
Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на x^4.
Полное оформление задания может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x}^{\to 0}+\dfrac{15}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{9}{x^3}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\dfrac{6}{x^2}^{\to 0}-\dfrac{3}{x^3}^{\to 0}-\dfrac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

Разные задачи на вычисление пределов

Найти

предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Максимальная степень «икса» в числителе: 2 Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (x можно записать как x^1)

Для раскрытия неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x}^{\to 0}+\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Под записью $\dfrac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Пределы с неопределенностью вида $\dfrac{0}{0}$ и метод их решения

Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 4

Решить предел $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь: $\frac{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1+1} = \frac{0}{0}$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения. Итак, решаем наш

предел $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x+1} = \frac{0}{0} = (*)$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение: $2x^2 - 3x - 5 = 0$

Сначала находим

дискриминант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$ И квадратный корень из него: $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$. В случае если дискриминант большой, например 361, используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

! Далее находим корни:

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2-3x-5=2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

Всё. Числитель на множители разложен. Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*)=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что можно сократить на $(x+1)$:

$$(*)=\lim_{x\to-1}(2x-5)=(*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель на множители.

$$2x^2-3x-5=0$$

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$$

$$x_1=\frac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\frac{3-7}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$2x^2-3x-5=2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)=(x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=-2-5=-7$$

Пример 5

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$

Сначала «чистовой» вариант решения

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: $8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$

Знаменатель:

$$x^2+4x-12=0$$

$$D=16+48=64$$

$$\sqrt{D}=8$$

$$x_1=\frac{-4-8}{2}=-6,\quad x_2=\frac{-4+8}{2}=2$$

$$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$

$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

Что важного в данном примере?

Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Уж эту-то формулу нужно знать и видеть.

Рекомендация: **Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем. Более**

того, такие числа целесообразно выносить за значок предела. Зачем? Да просто чтобы они не мешались под ногами. Главное, потом эти числа не потерять по ходу решения.

Обратите внимание, что на заключительном этапе решения я вынес за значок предела двойку, а затем – минус.

В ходе решения фрагмент типа $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x-2}$ *встречается очень часто. Сокращать такую дробь **нельзя**. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x-2}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(-1)=-1$ *, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.*

Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни.

<u>Пример 6</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Начинаем решать.

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела. Еще раз – это первое, что нужно выполнять для любого предела. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике.

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

В числителе находится разность корней. А от корней в математике принято, по возможности, избавляться.

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют **метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение**.

Вспоминаем формулу разности квадратов : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

И смотрим на наш предел: $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Что можно сказать? $(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое и называется **сопряженным выражением**).

Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.

Хорошо, $(a+b)$ мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, нужно его разделить на то же самое, т.е. на $(a+b)$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

То есть, **мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение**.

В известной степени, это искусственный прием.

Умножили. Теперь самое время применить вверху формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с **суммой** корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{5x-15}=(*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе:

$$(*)=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{5(x-3)}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{-9}{5}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right)=-\frac{3}{10}$$

Готово.

Как должно выглядеть решение данного примера в чистовом варианте?

Примерно так:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(x-3)}=\frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(x-3)}=$$

$$=\frac{1}{30}\lim_{x\to 3}\frac{-9(x-3)}{(x-3)}=\frac{-9}{30}=-\frac{3}{10}$$

Примеры нахождения логарифмов:

1. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 3}\left(5x^2-6x+7\right)$.

Решение:

$$\lim_{x\to 3}\left(5x^2-6x+7\right)=5\cdot 3^2-6\cdot 3+7=34.$$

2. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x}=\frac{3-3}{3}=0.$$

3. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=2-3=-1$$

.

4. Найти предел: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x+2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}(-2-2)((-2)^2+4)=-4\cdot 8-32.$$

5. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{3x^2}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\infty$$

.

6. <u>Рассмотрим замечательные пределы и их применение:</u>

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пример:

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2$.

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\approx 2{,}7182...$$

Число e в математике имеет важное значение. Логарифмы при освоении e

называют натуральными и для них употребляют обозначение ln. Итак, $\ln x=\log_e x$.

Например, $\ln 2\approx 0{,}6931$. [1]

7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$.

Решение:

Разделив числитель и знаменатель на x, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{1}{e}.$$

8. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k.$$

9. Найти предел: Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{6}=\left[\frac{x}{2}=y\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{6}=e^{6}$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 4}\left(mx^2-8x+5\right)$.

2. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{mx+7}{x-2}\right)$.

3. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15}{mx}$.

4. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^7+mx^4}{6x^4-2}\right)$.

5. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{mx^2+15x-6}{2x^2+6x-5}$.

6. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(m+2)x^5+16}{4x^5-10}$.

7. Найти предел: $\lim\limits_{x\to m}\left(\dfrac{x^2-(m+1)x+m}{x^2-mx}\cdot m\right)$.

8. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(m+6)x}{x}$.

9. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(m+5)\operatorname{tg}x}{x}$.

10. Найти предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{(m+3)x}$.

Ответы:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-11	5,5	0	беск.	0,5	0,75	0	7	6	16
2	5	7,5	0	беск.	1	1	1	8	7	20
3	21	9,5	0	беск.	1,5	1,25	2	9	8	24
4	37	11,5	0	беск.	2	1,5	3	10	9	28
5	53	13,5	0	беск.	2,5	1,75	4	11	10	32
6	69	15,5	0	беск.	3	2	5	12	11	36
7	85	17,5	0	беск.	3,5	2,25	6	13	12	40
8	101	19,5	0	беск.	4	2,5	7	14	13	44
9	117	21,5	0	беск.	4,5	2,75	8	15	14	48
10	133	23,5	0	беск.	5	3	9	16	15	52
11	149	25,5	0	беск.	5,5	3,25	10	17	16	56
12	165	27,5	0	беск.	6	3,5	11	18	17	60
13	181	29,5	0	беск.	6,5	3,75	12	19	18	64
14	197	31,5	0	беск.	7	4	13	20	19	68
15	213	33,5	0	беск.	7,5	4,25	14	21	20	72
16	229	35,5	0	беск.	8	4,5	15	22	21	76
17	245	37,5	0	беск.	8,5	4,75	16	23	22	80
18	261	39,5	0	беск.	9	5	17	24	23	84
19	277	41,5	0	беск.	9,5	5,25	18	25	24	88
20	293	43,5	0	беск.	10	5,5	19	26	25	92
21	309	45,5	0	беск.	10,5	5,75	20	27	26	96
22	325	47,5	0	беск.	11	6	21	28	27	100
23	341	49,5	0	беск.	11,5	6,25	22	29	28	104

24	357	51,5	0	беск.	12	6,5	23	30	29	108
25	373	53,5	0	беск.	12,5	6,75	24	31	30	112
26	389	55,5	0	беск.	13	7	25	32	31	116
27	405	57,5	0	беск.	13,5	7,25	26	33	32	120

Список литературы:

1. Баврин И.И. Высшая математика для педагогических направлений: Учебник для бакалавров / И.И. Баврин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 616 с.
2. Ячменёв Л.Т. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: Риор, 2017. - 42 с.

Интернет – ресурс:

3. Вся математика. Режим доступа: [http://www.allmath.ru 16.05.2020].
4. Вся элементарная математика. Режим доступа: [http://www.bymath.net 7.05.2020].
5. Математика – это просто. Режим доступа: [http://easymath.com.ua 16.05.2020].
6. Математический тренажер. Режим доступа: [https://www.mathgames.com/skills/ 12.05.2020]
7. Материал по различным разделам математики. Режим доступа: [http://www.mathematics.ru 12.05.2020]