Министерство науки и высшего образования

Российской Федерации

Братский педагогический колледж

федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования

«Братский государственный университет»

СОБЫТИЯ.

ВЕРОЯТНОСТЬ НАСТУПЛЕНИЯ СОБЫТИЯ

Методические рекомендации по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

для студентов
очной формы обучения
специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование

Автор: Е.А. Пичугина

Братск, 2021

Теория вероятностей и математическая статистика методические рекомендации / Сост. Е.А.Пичугина – Братск.: БПК ФГБОУ ВО «БрГУ», 2021 г. – 32 с.

Методические рекомендации по учебной дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов всех форм обучения содержат лекционный и практический материал по теме «События. Вероятность наступления события».

Печатается по решению научно-методического совета
Братского педагогического колледжа ФГБОУ ВО «БрГУ»
665709, г. Братск, ул. Макаренко, 40

СОДЕРЖАНИЕ

СОБЫТИЯ. ВИДЫ СОБЫТИЙ

Одно из базовых понятий теории вероятностей – это ***событие***. События бывают ***достоверными***, ***невозможными*** и ***случайными***.

Достоверным называют событие, которое в результате ***испытания*** *(осуществления определенных действий, определённого комплекса условий* **обязательно произойдёт**. Например, в условиях земного тяготения подброшенная монета непременно упадёт вниз.

Невозможным называют событие, которое **заведомо не произойдёт** в результате испытания. Пример невозможного события: в условиях земного тяготения подброшенная монета улетит вверх.

И, наконец, событие называется **случайным**, если в результате испытания оно может, **как произойти, так и не произойти**, при этом должен иметь место принципиальный критерий случайности: случайное событие – есть следствие случайных факторов, воздействие которых предугадать невозможно или крайне затруднительно. Пример: в результате броска монеты выпадет «орёл». В рассмотренном случае случайные факторы – это форма и физические характеристики монеты, сила/направление броска, сопротивление воздуха и т.д.

Подчёркнутый критерий случайности очень важен – так, например, карточный шулер может очень ловко имитировать случайность и давать выигрывать жертве, но ни о каких случайных факторах, влияющих на итоговый результат, речи не идёт.

Любой результат испытания называется ***исходом***, который, собственно и представляет собой появление определённого события. В частности, при подбрасывании монеты возможно 2 исхода (случайных события): выпадет орёл, выпадет решка. Естественно, подразумевается, что данное испытание проводится в таких условиях, что монета не может встать на ребро или, скажем, зависнуть в невесомости.

События **обозначают** большими латинскими буквами $A, B, C, D, E, F, \ldots$ либо теми же буквами с подстрочными индексами, например: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots$. Исключение составляет буква P, которая зарезервирована под другие нужды.

Запишем следующие случайные события:

A_o – в результате броска монеты выпадет «орёл»;

B_5 – в результате броска игральной кости (кубика) выпадет 5 очков;

C_T – из колоды будет извлечена карта трефовой масти *(по умолчанию колода считается полной)*.

Да, события прямо так и записывают в практических задачах, при этом в уместных случаях удобно использовать «говорящие» подстрочные индексы (хотя можно обойтись и без них).

Следует в третий раз подчеркнуть, что случайные события обязательно удовлетворяют вышеприведённому критерию случайности. В этом смысле снова показателен 3-й пример: если из колоды изначально удалить все карты трефовой масти, то событие C_T становится *невозможным*. Наоборот, если испытателю известно, что, например, дама треф лежит снизу, то он при желании может сделать событие C_T *достоверным* =) Таким образом, в данном примере предполагается, что **карты хорошо перемешаны и их рубашки неразличимы**, т.е. колода не является краплёной. Причём, здесь под «крапом» понимаются даже не «умелые руки», ликвидирующие случайность вашего выигрыша, а видимые дефекты карт. Например, рубашка той же дамы треф может быть грязной, порванной, заклеенной скотчем…

Таким образом, при розыгрыше важного жребия всегда есть смысл невзначай посмотреть, а не одинаковы ли грани монеты ;-)

Другая важная характеристика событий – это их ***равновозможность***. Два или бОльшее количество событий называют **равновозможными**, если ни одно из них не является более возможным, чем другие. Например:

выпадение орла или решки при броске монеты;

выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;

извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды.

При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.

Могут ли быть те же события **не равновозможными**? Могут! Например, если у монеты или кубика смещён центр тяжести, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани. Как говорится, ещё одна лазейка для мошенников. События $C_Т, C_П, C_Ч, C_Б$ – извлечение трефы, пики, червы или бубны тоже равновозможны. Однако равновозможность легко нарушит фокусник, который, тасуя колоду (даже «идеальную»), ловко подсмотрит и спрячет в рукаве, например, туза треф. Здесь становится *менее возможным*, что оппоненту будет сдана трефа, и, главное, *менее возможно*, что будет сдан туз.

Тем не менее, в рассмотренных трёх случаях при потере равновозможности всё же сохраняется случайность событий.

СОВМЕСТНЫЕ И НЕСОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ. ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

Полная группа событий

События называют ***несовместными***, если в одном и том же испытании появление одного из событий **исключает** появление других событий. Простейшим примером несовместных событий является пара ***противоположных*** событий. Событие, противоположное данному, обычно обозначается той же латинской буквой с чёрточкой вверху. Например:

$A_О$ – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\bar{A}_О$ – в результате броска монеты выпадет решка.

Совершено ясно, что в отдельно взятом испытании появление орла исключает появление решки (и наоборот), поэтому данные события и называются несовместными.

Противоположные события легко формулируются из соображений элементарной логики:

B_5 – в результате броска игрального кубика выпадет 5 очков;

$\bar{B}_5$ – в результате броска игрального кубика выпадет число очков, отличное от пяти.

Либо пять, либо не пять – третьего не дано, т.е. события **несовместны** и **противоположны**.

Аналогично – или трефа или карта другой масти:

$C_Т$ – из колоды будет извлечена карта трефовой масти; $\overline{C_Т}$ – из колоды будет извлечена пика, черва или бубна.

Множество несовместных событий образуют ***полную группу событий***, если в результате отдельно взятого испытания **обязательно появится одно из этих событий**. Очевидно, что любая пара противоположных событий (в частности, примеры выше) образует полную группу. Однако в различных задачах с одним и тем же объектом могут фигурировать разные события, например, для игрального кубика характерно рассмотрение следующего набора:

B_1 – в результате броска игрального кубика выпадет 1 очко;

B_2 – … 2 очка;

B_3 – … 3 очка;

B_4 – … 4 очка;

B_5 – … 5 очков;

B_6 – … 6 очков.

События $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ **несовместны** *(поскольку появление какой-либо грани исключает одновременное появление других)* **и образуют полную группу** *(так как в результате испытания непременно появится одно из этих шести событий)*.

Ещё одно важное понятие, которое нам скоро потребуется – это ***элементарность*** исхода (события). Если совсем просто, то элементарное событие «нельзя разложить на другие события». Например, события $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ элементарны, но событие $\overline{B_5}$ не является таковым, так как подразумевает выпадение 1, 2, 3, 4 или 6 очков (включает в себя 5 элементарных исходов).

В примере с картами события $C_Т, C_П, C_Ч, C_Б$ (извлечение трефы, пики, червы или бубны соответственно) несовместны и образуют полную группу, но они неэлементарны. Если считать, что в колоде 36 карт, то каждое из перечисленных событий включает в себя 9 элементарных исходов. Аналогично – события

$D_6, D_7, D_8, D_9, D_{10}, D_В, D_Д, D_К, D_Т$ (извлечение шестёрки, семёрки, …, короля, туза) несовместны, образуют полную группу и неэлементарны (каждое включает в себя 4 исхода).

Таким образом, элементарным исходом здесь считается лишь извлечение какой-то конкретной карты, и, разумеется, 36 несовместных элементарных исходов тоже образуют полную группу событий.

Совместные события менее значимы с точки зрения решения практических задач, но обходить их стороной не будем. События называются **совместными**, если в отдельно взятом испытании появление одного из них **не исключает** появление другого. Например:

$C_Т$ – из колоды карт будет извлечена трефа;

D_7 – из колоды карт будет извлечена семёрка.

Если быть совсем лаконичным, одно не исключает другого.

Понятие совместности охватывает и бОльшее количество событий:

D – завтра в 12.00 будет дождь;

G – завтра в 12.00 будет гроза;

S – завтра в 12.00 будет солнце.

Ситуация, конечно, довольно редкая, но совместное появление всех трёх событий в принципе не исключено. Следует отметить, что перечисленные события совместны и попарно, т.е. может быть только ливень с грозой или грибной дождик, или погромыхает неподалёку на фоне ясного неба.

АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

Пожалуйста, запомните **ВАЖНЕЙШЕЕ ПРАВИЛО**, без которого освоить тервер просто нереально:

Операция сложения событий означает **логическую связку** **ИЛИ**, а **операция умножения событий** – **логическую связку** **И**.

1) **Суммой** двух событий A и B называется событие $A+B$ которое состоит в том, что наступит **или** событие A **или** событие B **или** оба события одновременно. В том случае, если события

несовместны, последний вариант отпадает, то есть может наступить **или** событие A **или** событие B.

Правило распространяется и на бОльшее количество слагаемых, например, событие $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$ состоит в том, что произойдёт **хотя бы одно** из событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, а **если события несовместны** – **то одно и только одно** событие из этой суммы: **или** событие A_1, **или** событие A_2, **или** событие A_3, **или** событие A_4, **или** событие A_5.

Примеров масса:

События $\overline{B}_5 = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_6$ (при броске игральной кости не выпадет 5 очков) состоит в том, что выпадет **или** 1, **или** 2, **или** 3, **или** 4, **или** 6 очков.

Событие $B_{1,2} = B_1 + B_2$ (выпадет **не более** двух очков) состоит в том, что появится 1 **или 2очка.**

Событие $B_Ч = B_2 + B_4 + B_6$ (будет чётное число очков) состоит в том, что выпадет **или** 2 **или** 4**или** 6 очков.

Событие $C_Ч + C_Б$ заключается в том, что из колоды будет извлечена карта красной масти (черва **или** бубна), а событие $D_В + D_Д + D_К + D_Т$ – в том, что будет извлечена «картинка» (валет **или** дама **или** король **или** туз).

Чуть занятнее дело с совместными событиями:

Событие $C_Т + D_7$ состоит в том, что из колоды будет извлечена трефа **или** семёрка **или** семёрка треф. Согласно данному выше определению, **хотя бы что-то** – или любая трефа или любая семёрка или их «пересечение» – семёрка треф. Легко подсчитать, что данному событию соответствует 12 элементарных исходов (9 трефовых карт + 3 оставшиеся семёрки).

Событие $D + G + S$ состоит в том, что завтра в 12.00 наступит **ХОТЯ БЫ ОДНО из суммируемых совместных событий**, а именно:

– или будет только дождь / только гроза / только солнце;

– или наступит только какая-нибудь пара событий (дождь + гроза / дождь + солнце / гроза + солнце);

– или все три события появятся одновременно.

То есть, событие $D+G+S$ включает в себя 7 возможных исходов.

Второй столп алгебры событий:

2) **Произведением** двух событий A и B называют событие AB, которое состоит в совместном появлении этих событий, иными словами, умножение AB означает, что при некоторых обстоятельствах наступит **и** событие A, **и** событие B. Аналогичное утверждение справедливо и для бОльшего количества событий, так, например, произведение $A_1A_2A_3\cdot\ldots\cdot A_{10}$ подразумевает, что при определённых условиях произойдёт **и** событие A_1, **и** событие A_2, **и** событие A_3, …, **и** событие A_{10}.

Рассмотрим испытание, в котором подбрасываются две монеты и следующие события:

A_1 – на 1-й монете выпадет орёл;

$\overline{A}_1$ – на 1-й монете выпадет решка;

A_2 – на 2-й монете выпадет орёл;

$\overline{A}_2$ – на 2-й монете выпадет решка.

Тогда:

– событие A_1A_2 состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет орёл;

– событие $\overline{A}_1\overline{A}_2$ состоит в том, что на обеих монетах (на 1-й **и** на 2-й) выпадет решка;

– событие $A_1\overline{A}_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й монете решка;

– событие $\overline{A}_1A_2$ состоит в том, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл.

Нетрудно заметить, что события $A_1A_2,\ \overline{A}_1\overline{A}_2,\ A_1\overline{A}_2,\ \overline{A}_1A_2$ **несовместны** *(т.к. не может, например, выпасть 2 орла и в то же самое время 2 решки)* и образуют **полную группу***(поскольку учтены* ***все*** *возможные исходы броска двух монет)*. Давайте просуммируем данные события: $A_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2+A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$. Как интерпретировать эту запись? Очень просто – умножение означает логическую связку **И**, а сложение – **ИЛИ**. Таким образом, сумму $A_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2 + A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2$ легко прочитать понятным человеческим языком: «выпадут два орла **или** две решки **или** на 1-й монете выпадет орёл **и** на 2-й решка **или** на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й монете орёл »

Это был пример, когда **в одном испытании** задействовано несколько объектов, в данном случае – две монеты. Другая распространенная в практических задачах схема – это ***повторные испытания***, когда, например, один и тот же игральный кубик бросается 3 раза подряд. В качестве демонстрации рассмотрим следующие события:

$B_{(1)4}$ – в 1-м броске выпадет 4 очка;

$B_{(2)5}$ – во 2-м броске выпадет 5 очков;

$B_{(3)6}$ – в 3-м броске выпадет 6 очков.

Тогда событие $B_{(1)4} \cdot B_{(2)5} \cdot B_{(3)6}$ состоит в том, что в 1-м броске выпадет 4 очка **и** во 2-м броске выпадет 5 очков **и** в 3-м броске выпадет 6 очков. Очевидно, что в случае с кубиком будет значительно больше **комбинаций** (исходов), чем, если бы мы подбрасывали монету.

ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Вероятность события – это центральное понятие теории вероятностей. …Убийственно логичная вещь, но с чего-то надо было начинать =) Существует несколько подходов к её определению:

Классическое определение вероятности;
Геометрическое определение вероятности;
Статистическое определение вероятности.

Обозначения. Вероятность некоторого события A обозначается большой латинской буквой P, а само событие берётся в скобки, выступая в роли своеобразного аргумента. Например:

$P(A_O)$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$P(B_5)$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

$P(C_T)$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Также для обозначения вероятности широко используется маленькая буква p. В частности, можно отказаться от громоздких обозначений событий A_O, B_5, C_T и их вероятностей $P(A_O), P(B_5), P(C_T)$ в пользу следующей стилистики:

$p_O = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$p_5 = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

$p_T = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что из колоды будет извлечена карта трефовой масти.

Данный вариант популярен при решении практических задач, поскольку позволяет заметно сократить запись решения. Как и в первом случае, здесь удобно использовать «говорящие» подстрочные/надстрочные индексы.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий; m – количество элементарных исходов, ***благоприятствующих*** событию A.

При броске монеты может выпасть либо орёл, либо решка – данные события образуют полную группу, таким образом, общее число исходов $n = 2$; при этом, каждый из них элементарен и равновозможен. Событию A_o благоприятствует $m = 1$ исход (выпадение орла). По классическому определению вероятностей: $P(A_o) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

Аналогично – в результате броска кубика может появиться $n = 6$ элементарных равновозможных исходов, образующих полную группу, а событию B_5 благоприятствует единственный $m = 1$ исход (выпадение пятёрки). Поэтому: $P(B_5) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$.

Особое внимание обращаю на третий пример. Здесь будет некорректным сказать *«раз в колоде 4 масти, то вероятность извлечения трефы* $P(C_T) = \frac{1}{4}$*»*. В определении речь идёт об элементарных исходах, поэтому правильный порядок рассуждений таков: всего в колоде 36 карт *(несовместные элементарные исходы, образующие полную группу)*, из них 9 карт трефовой масти *(кол-во элементарных исходов, благоприятствующих событию* C_T*)*; по классическому определению вероятности: $P(C_T) = \frac{m}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Именно так!

Вероятности можно выразить и в процентах, например: вероятность выпадение орла равна $\frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$, выпадения пятёрки $\frac{1}{6} \cdot 100\% \approx 16{,}67\%$, извлечения трефы $\frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%$, но в теории вероятностей **ЭТОГО ДЕЛАТЬ НЕ ПРИНЯТО** (хотя не возбраняется прикидывать проценты в уме).

Принято использовать доли единицы, и, очевидно, что вероятность может изменяться в пределах $0 \le P(A) \le 1$. При этом если $P(A) = 0$, то событие A является *невозможным*, если $P(A) = 1$ – *достоверным*, а если $0 < P(A) < 1$, то речь идёт о *случайном* событии.

! Если в ходе решения любой задачи у вас получилось какое-то другое значение вероятности – ищите ошибку!

При классическом подходе к определению вероятности крайние значения (ноль и единица) получаются посредством точно таких же рассуждений. Пусть из некой урны, в которой находятся 10 красных шаров, наугад извлекается 1 шар. Рассмотрим следующие события:

K – из урны будет извлечён красный шар;

Z – из урны будет извлечён зелёный шар.

Общее количество исходов: $n = 10$. Событию K благоприятствуют все возможные исходы $(m = 10)$, следовательно, $P(K) = \frac{m}{n} = \frac{10}{10} = 1$, то есть данное событие *достоверно*. Для 2-го же события благоприятствующие исходы отсутствуют $(m = 0)$, поэтому $P(Z) = \frac{m}{n} = \frac{0}{10} = 0$, то есть событие Z *невозможно*.

Особый интерес представляют события, вероятность наступления которых чрезвычайно мала. Хоть такие события и являются случайными, для них справедлив следующий постулат:

в единичном испытании маловозможное событие не произойдёт.

Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна единице. если события образуют полную группу, то со 100%-й вероятностью какое-то из них произойдёт. В самом простом случае полную группу образуют противоположные события, например:

A_o – в результате броска монеты выпадет орёл;

$\overline{A}_o$ – в результате броска монеты выпадет решка.

По теореме: $P(A_o)+P(\overline{A}_o)=1$

Совершенно понятно, что данные события равновозможны и их вероятности одинаковы $P(A_o)=\frac{1}{2},\ P(\overline{A}_o)=\frac{1}{2}$.

По причине равенства вероятностей равновозможные события часто называют ***равновероятными***.

Пример с кубиком: события $B_5,\ \overline{B}_5$ противоположны, поэтому $P(B_5)+P(\overline{B}_5)=1$.

Рассматриваемая теорема удобна тем, что позволяет быстро найти вероятность противоположного события. Так, если известна вероятность $P(B_5)=\frac{1}{6}$ того, что выпадет пятёрка, легко вычислить вероятность того, что она не выпадет:

$$P(\overline{B}_5)=1-P(B_5)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Это гораздо проще, чем суммировать вероятности пяти элементарных исходов. Для элементарных исходов, к слову, данная теорема тоже справедлива: $P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)+P(B_5)+P(B_6)=1$

События B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6, как отмечалось выше, равновозможны – и теперь мы можем сказать, что равновероятны. Вероятность выпадения любой грани кубика равна $\frac{1}{6}$:

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=P(B_5)=P(B_6)=\frac{1}{6}$$

Ну и на закуску колода: поскольку нам известна вероятность $P(C_T)=\frac{1}{4}$ того, что будет извлечена трефа, то легко найти вероятность того, что будет извлечена карта другой масти:

$$P(C_T)+P(\overline{C}_T)=1 \quad\Rightarrow\quad P(\overline{C}_T)=1-P(C_T)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Заметьте, что рассмотренные пары событий $B_5, \overline{B}_5$ и $C_T, \overline{C}_T$ не равновероятны, как оно чаще всего и бывает.

В упрощенной версии записи решения вероятность противоположного события стандартно обозначается строчной буквой q. Например, если $p = 0,7$ – вероятность того, что стрелок попадёт в цель, то $q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3$ – вероятность того, что он промахнётся.

ЗАДАЧИ НА КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятность наступления события A в некотором испытании равна отношению $P(A) = \frac{m}{n}$, где:

n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов данного испытания, которые образуют полную группу событий;

m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Задача 1 В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, и, очевидно, справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно *(**равновозможность** исходов)*, при этом исходы ***элементарны*** и образуют ***полную группу событий*** *(т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30 шаров)*.

Таким образом, общее число исходов: $n = 30$

Рассмотрим событие: A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

С другими пунктами аналогично, рассмотрим следующие события:

B – из урны будет извлечён красный шар;

C – из урны будет извлечён чёрный шар.

Событию B благоприятствует 5 элементарных исходов, а событию C – 10 элементарных исходов. Таким образом, соответствующие вероятности:

$$P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6};$$

$$P(C)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

Типичная проверка многих задач по терверу осуществляется с помощью **теоремы о сумме вероятностей событий, образующих полную группу**. В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A)+P(B)+P(C)=1$.

Проверим, так ли это: $P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$, в чём и хотелось убедиться.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$, б) $\frac{1}{6}$, в) $\frac{1}{3}$

<u>**Задача 2**</u> В магазин поступило 30 холодильников, пять из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Решение: *30 – 5 = 25 холодильников не имеют дефекта.*

По классическому определению: $p=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$ *– вероятность того, что наугад выбранный холодильник не имеет дефекта.*

Ответ: $\frac{5}{6} \approx 0{,}8333$

<u>Задача 3</u> Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры, но помнит, что одна из них – ноль, а другая – нечётная. Найти вероятность того, что он наберёт правильный номер.

Примечание*: ноль – это чётное число (делится на 2 без остатка)*

Решение: сначала найдём общее количество исходов. По условию, абонент помнит, что одна из цифр – ноль, а другая цифра – нечётная. Здесь рациональнее воспользоваться ***методом прямого перечисления исходов***. То есть, при оформлении решения просто записываем все комбинации:

01, 03, 05, 07, 09

10, 30, 50, 70, 90

И подсчитываем их – всего: 10 исходов.

Благоприятствующий исход один: верный номер.

По классическому определению:

$p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ – вероятность того, что абонент наберёт правильный номер

Ответ: 0,1

<u>Задача 4</u>

Абонент забыл пин-код к своей сим-карте, однако помнит, что он содержит три «пятёрки», а одна из цифр – то ли «семёрка», то ли «восьмёрка». Какова вероятность успешной авторизации с первой попытки?

Решение*: найдём общее число исходов:* $C_4^1 = 4$ *способами можно выбрать место, на котором расположена сомнительная цифра* ***и на каждом*** *из этих 4 мест могут располагаться 2 цифры (семёрка или восьмёрка). По правилу умножения комбинаций, общее число исходов:* $C_4^1 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$.

Как вариант, в решении можно просто перечислить все исходы (благо их немного):

7555, 8555, 5755, 5855, 5575, 5585, 5557, 5558

Благоприятствующий исход один (правильный пин-код).

Таким образом, по классическому определению: $p = \frac{1}{8}$ *– вероятность того, что абонент авторизируется с 1-й попытки*

Ответ: $p = \frac{1}{8}$

<u>Задача 5</u> Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме выпадет:

а) пять очков;

б) не более четырёх очков;

в) от 3 до 9 очков включительно.

Решение: найдём общее количество исходов:

$C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 1-го кубика **и** $C_6^1 = 6$ способами может выпасть грань 2-го кубика; по **правилу умножения комбинаций**, всего: $C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ возможных комбинаций. Иными словами, **каждая** грань 1-го кубика может составить <u>упорядоченную</u> пару**с каждой** гранью 2-го кубика. Условимся записывать такую пару в виде (a, b), где a – цифра, выпавшая на 1-м кубике, b – цифра, выпавшая на 2-м кубике.

а) Рассмотрим событие: A – при бросании двух игральных костей выпадет 5 очков. Запишем и подсчитаем количество исходов, которые благоприятствуют данному событию: $(1, 4); (4, 1); (2, 3); (3, 2)$

Итого: 4 благоприятствующих исхода. По классическому определению:

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ – искомая вероятность.

б) Рассмотрим событие: B – выпадет не более 4 очков. То есть, либо 2, либо 3, либо 4 очка. Снова перечисляем и подсчитываем благоприятствующие комбинации, слева я буду записывать суммарное количество очков, а после двоеточия – подходящие пары:

$2\ \text{очка}: \quad (1, 1)$

$3\ \text{очка}: \quad (1, 2); (2, 1)$

$4\ \text{очка}: \quad (1, 3); (3, 1); (2, 2)$

Итого: 6 благоприятствующих комбинаций. Таким образом: $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что выпадет не более 4 очков.

в) Рассмотрим событие: C – выпадет от 3 до 9 очков включительно. Здесь можно пойти прямой дорогой, но… что-то не хочется. Да, некоторые пары уже перечислены в предыдущих пунктах, но работы все равно предстоит многовато.

Как лучше поступить? В подобных случаях рациональным оказывается окольный путь. Рассмотрим **противоположное событие**: $\overline{C}$ – выпадет 2 или 10 или 11 или 12 очков.

В чём смысл? Противоположному событию благоприятствует значительно меньшее количество пар:

$2\ \text{очка}: \quad (1, 1)$

$10\ \text{очков}: \quad (4, 6); (6, 4); (5, 5)$

$11\ \text{очков}: \quad (5, 6); (6, 5)$

$12\ \text{очков}: \quad (6, 6)$

Итого: 7 благоприятствующих исходов.

По классическому определению:

$P(\overline{C}) = \frac{7}{36}$ – вероятность того, что выпадет меньше трёх или больше 9 очков.

Далее пользуемся тем, что **сумма вероятностей противоположных событий** равна единице:

$$P(C) + P(\overline{C}) = 1 \quad \Rightarrow \quad P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}$$ –

вероятность того, что выпадет от 3 до 9 очков включительно.

Ответ: $\text{а)}\ \frac{1}{9}, \quad \text{б)}\ \frac{1}{6}, \quad \text{в)}\ \frac{29}{36}$

<u>Задача 6</u>

Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков:

а) будет равно семи;

б) окажется не менее 20;

в) будет чётным.

***Решение**: найдём общее количество исходов:*

$C_6^1 \cdot C_6^1 = 6 \cdot 6 = 36$ *способами могут выпасть цифры на 2 кубиках.*

а) Рассмотрим событие: A – при броске двух игральных костей произведение очков будет равно семи. Для данного события не существует благоприятствующих исходов, по классическому определению вероятности:

$P(A) = \frac{0}{36} = 0$ *, т.е. это событие является невозможным.*

б) Рассмотрим событие: B – при броске двух игральных костей произведение очков окажется не менее 20. Данному событию благоприятствуют следующие исходы:

$20\ \textit{очков}: \quad (4, 5); (5, 4)$

$24\ \textit{очка}: \quad (4, 6); (6, 4)$

$25\ \textit{очков}: \quad (5, 5)$

$30\ \textit{очков}: \quad (5, 6); (6, 5)$

$36\ \textit{очков}: \quad (6, 6)$

Итого: 8

По классическому определению:

$P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ *– искомая вероятность.*

в) Рассмотрим противоположные события:

C *– произведение очков будет чётным;*

$\overline{C}$ *– произведение очков будет нечётным.*

Перечислим все исходы, благоприятствующие событию $\overline{C}$ *:*

$1\,очко: \quad (1,1)$

$3\,очка: \quad (1,3); (3,1)$

$5\,очков: \quad (1,5); (5,1)$

$9\,очков: \quad (3,3)$

$15\,очков: \quad (3,5); (5,3)$

$25\,очков: \quad (5,5)$

Итого: 9 благоприятствующих исходов.

По классическому определению вероятности: $P(\overline{C}) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$

Противоположные события образуют полную группу, поэтому: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ *– искомая вероятность.*

Ответ: а) 0, б) $\dfrac{2}{9}$, в) $\dfrac{3}{4}$

<u>Задача 7</u> В лифт 20-этажного дома на первом этаже зашли 3 человека. И поехали. Найти вероятность того, что:

а) они выйдут на разных этажах

б) двое выйдут на одном этаже;

в) все выйдут на одном этаже.

Решение: вычислим общее количество исходов: $C_{19}^1 = 19$ способами может выйти из лифта 1-й пассажир **и** $C_{19}^1 = 19$ способами – 2-й пассажир **и** $C_{19}^1 = 19$ способами – третий пассажир. По правилу умножения комбинаций: $C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 \cdot C_{19}^1 = 19 \cdot 19 \cdot 19 = 6859$ возможных исходов. Т.е, **каждый** этаж выхода 1-го человека может комбинироваться **с каждым** этажом выхода 2-го человека и **с каждым** этажом выхода 3-го человека.

Второй способ основан на **размещениях с повторениями**:

$A_{19(повт)}^3 = 19^3$ – кому как понятнее.

а) Рассмотрим событие: A – пассажиры выйдут на разных этажах. Вычислим количество благоприятствующих исходов:

$A_{19}^3 = 17 \cdot 18 \cdot 19 = 5814$ способами могут выйти 3 пассажира на разных этажах. Рассуждения по формуле $C_{19}^3 \cdot P_3$ проведите самостоятельно.

По классическому определению:

$$P(A) = \frac{5814}{6859} = \frac{306}{361}$$

в) Рассмотрим событие: B – пассажиры выйдут на одном этаже. Данному событию благоприятствуют $C_{19}^1 = 19$ исходов и по классическому определению, соответствующая вероятность: $P(B) = \frac{19}{6859} = \frac{1}{361}$.

Заходим с чёрного хода:

б) Рассмотрим событие: C – два человека выйдут на одном этаже *(и, соответственно, третий – на другом)*.

События A, B, C образуют **полную группу** *(считаем, что в лифте никто не уснёт и лифт не застрянет =))*, а значит, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$.

В результате, искомая вероятность:

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{306}{361} - \frac{1}{361} = \frac{54}{361}$$

Таким образом, **теорема о сложении вероятностей событий, образующих полную группу**, может быть не только удобной, но и стать самой настоящей палочкой-выручалочкой!

Ответ: а) $\frac{306}{361} \approx 0{,}8476$, б) $\frac{54}{361} \approx 0{,}1496$, в) $\frac{1}{361} \approx 0{,}0028$

Задача 8

Подбрасывается 10 монет. Найти вероятность того, что:

а) на всех монетах выпадет орёл;

б) на 9 монетах выпадет орёл, а на одной – решка;

в) орёл выпадет на половине монет.

Решение: *вычислим общее количество исходов:* $A_{2(\text{повт})}^{10} = 2^{10} = 1024$ *способами могут упасть 10 монет.*

Другой путь: $C_2^1 = 2$ *способами может упасть 1-я монета* ***и*** $C_2^1 = 2$ *способами может упасть 2-я монета* ***и*** *...* ***и*** $C_2^1 = 2$ *способами может упасть 10-я монета. По правилу умножения комбинаций, 10 монет могут упасть* $\underbrace{C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot \ldots \cdot C_2^1}_{10\ раз} = 2^{10} = 1024$ *способами.*

а) Рассмотрим событие: A *– на всех монетах выпадет орёл. Данному событию благоприятствует единственный исход, по классическому определению вероятности:* $P(A) = \frac{1}{1024}$.

б) Рассмотрим событие: B *– на 9 монетах выпадет орёл, а на одной – решка.*

Существует $C_{10}^1 = 10$ *монет, на которых может выпасть решка. По классическому определению вероятности:* $P(B) = \frac{10}{1024} = \frac{5}{512}$.

в) Рассмотрим событие: C *– орёл выпадет на половине монет.*

Существует $C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{120} = 252$ *уникальных комбинаций из пяти монет, на которых может выпасть орёл. По классическому определению вероятности:* $P(C) = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$

Ответ*:*

$$\text{а) } \frac{1}{1024} \approx 0{,}0010, \quad \text{б) } \frac{5}{512} \approx 0{,}0098, \quad \text{в) } \frac{63}{256} \approx 0{,}2461$$

Задача 9

На семиместную скамейку случайным образом рассаживается 7 человек. Какова вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом?

Решение: общее количество исходов $P_7 = 7! = 5040$ способами могут рассесться 7 человек на скамейке.

Но вот как подсчитать количество благоприятствующих исходов? Тривиальные формулы не подходят и единственный путь – это логические рассуждения. Сначала рассмотрим ситуацию, когда Саша и Маша оказались рядом на левом краю скамейки:

*	*					

Очевидно, что порядок имеет значение: слева может сидеть Саша, справа Маша и наоборот. Но это ещё не всё – **для каждого** из этих двух случаев остальные люди могут рассесться на свободных местах $5! = 120$ способами. Выражаясь комбинаторно, Сашу и Машу можно переставить на соседних местах $P_2 = 2!$ способами **и** для каждой такой перестановки других людей можно переставить $P_5 = 5! = 120$ способами.

Таким образом, по правилу умножения комбинаций, выходит $2! \cdot 5!$ благоприятствующих исходов.

Но и это ещё не всё! Перечисленные факты справедливы **для каждой** пары соседних мест:

*	*					
	*	*				
		*	*			
			*	*		
				*	*	
					*	*

Интересно отметить, что если скамейку «скруглить» *(соединяя левое и правое место)*, то образуется дополнительная, седьмая пара соседних мест. Но не будем отвлекаться. Согласно тому же принципу умножения комбинаций, получаем окончательное количество благоприятствующих исходов: $6 \cdot 2! \cdot 5!$

По классическому определению:

$$p = \frac{6 \cdot 2! \cdot 5!}{7!} = \frac{6 \cdot 2}{6 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$ – вероятность того, что два определённых человека окажутся рядом.

Ответ: $\frac{2}{7} \approx 0{,}2857$

Задача 11

Какова вероятность того, что в четырех сданных картах будет один туз и один король?

Решение: коль скоро неизвестный автор умолчал о колоде, будем считать, что в ней 36 карт.

Вычислим общее количество исходов. Сколькими способами можно извлечь 4 карты из колоды? Наверное, все поняли, что речь идёт о **количестве сочетаний**:

$C_{36}^4 = \frac{36!}{32! \cdot 4!} = \frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{24} = 58905$ способами можно выбрать 4 карты из колоды.

Теперь считаем благоприятствующие исходы. По условию, в выборке из 4 карт должен быть один туз, один король и, о чём не сказано открытым текстом, – **две другие карты**:

$C_4^1 = 4$ способами можно извлечь одного туза;

$C_4^1 = 4$ способами можно выбрать одного короля.

Исключаем из рассмотрения тузов и королей: 36 – 4 – 4 = 28

$C_{28}^2 = \frac{28!}{26! \cdot 2!} = \frac{27 \cdot 28}{2} = 378$ способами можно извлечь две другие карты.

По правилу умножения комбинаций:

$C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^2 = 4 \cdot 4 \cdot 378 = 6048$ способами можно извлечь искомую комбинацию карт (одного туза **и** одного короля **и** две другие карты).

Прокомментирую комбинационный смысл записи $C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^2$ другим способом:

каждый туз комбинируется **с каждым** королем и **с каждой** возможной парой других карт.

По классическому определению: $p = \dfrac{C_4^1 \cdot C_4^1 \cdot C_{28}^2}{C_{36}^4} = \dfrac{6048}{58905} = \dfrac{96}{935}$ – вероятность того, что среди четырех сданных карт будет один туз и один король.

Ответ: $\dfrac{96}{935} \approx 0{,}1027$

<u>Задача 12</u>

В ящике находится 15 качественных и 5 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что:

а) обе детали будут качественными;

б) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной;

в) обе детали бракованны.

Решение*: всего: 15 + 5 = 20 деталей в ящике. Вычислим общее число исходов:*

$C_{20}^2 = \dfrac{20!}{18! \cdot 2!} = \dfrac{19 \cdot 20}{2} = 190$ *способами можно извлечь 2 детали из ящика.*

а) Рассмотрим событие: A *– обе извлечённые детали будут качественными.*

$C_{15}^2 = \dfrac{15!}{13! \cdot 2!} = \dfrac{14 \cdot 15}{2} = 105$ *способами можно извлечь 2 качественные детали.*

По классическому определению $P(A) = \dfrac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \dfrac{105}{190} = \dfrac{21}{38}$ *вероятности:*

б) Рассмотрим событие: B *– одна деталь будет качественной, а одна – бракованной.*

$C_{15}^1 \cdot C_5^1 = 15 \cdot 5 = 75$ *способами можно извлечь 1 качественную деталь* ***и*** *1 бракованную.*

По классическому определению: $P(B) = \dfrac{C_{15}^1 \cdot C_5^1}{C_{20}^2} = \dfrac{75}{190} = \dfrac{15}{38}$

в) Рассмотрим событие: C *– обе извлечённые детали бракованны.*

$$C_5^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$$

способами можно извлечь 2 бракованные детали.

По классическому определению:

$$P(C) = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$$

***Проверка**: вычислим сумму вероятностей событий, образующих полную группу:*

$$P(A) + P(B) + P(C) = \frac{21}{38} + \frac{15}{38} + \frac{2}{38} = \frac{38}{38} = 1$$

, что и требовалось проверить.

***Ответ**:* а) $\frac{21}{38}$, б) $\frac{15}{38}$, в) $\frac{1}{19}$

Задача 13

Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на два из трёх вопросов?

Решение: итак, расклад таков: всего 60 вопросов, среди которых 25 «хороших» и, соответственно, 60 – 25 = 35 «плохих». Ситуация шаткая и не в пользу студента. Давайте узнаем, насколько хороши его шансы:

$$C_{60}^3 = \frac{60!}{57!\cdot 3!} = \frac{58\cdot 59\cdot 60}{6} = 34220$$

способами можно выбрать 3 вопроса из 60 *(общее количество исходов)*.

Для того чтобы сдать экзамен, нужно ответить на 2 **или** 3 вопроса. Считаем благоприятствующие комбинации:

$$C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 = \frac{25!}{23!\cdot 2!}\cdot 35 = \frac{24\cdot 25}{2}\cdot 35 = 10500$$

способами можно выбрать 2 «хороших» вопроса **и** один «плохой»;

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{22!\cdot 3!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{6} = 2300$$

способами можно выбрать 3 «хороших» вопроса.

По **правилу сложения комбинаций**:

$C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3 = 10500 + 2300 = 12800$ способами можно выбрать благоприятствующую для сдачи экзамена комбинацию 3 вопросов *(без разницы с двумя или тремя «хорошими» вопросами)*.

По классическому определению:

$$p = \frac{C_{25}^2 \cdot C_{35}^1 + C_{25}^3}{C_{60}^3} = \frac{12800}{34220} = \frac{640}{1711}$$ – вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Ответ: $\frac{640}{1711} \approx 0{,}37$

<u>Задача 14</u>

Игроку в покер сдаётся 5 карт. Найти вероятность того, что:

а) среди этих карт будет пара десяток и пара валетов;

б) игроку будет сдан флеш (5 карт одной масти);

в) игроку будет сдано каре (4 карты одного номинала).

Какую из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить?

Справка*: в покер традиционно играют 52-карточной колодой, которая содержит карты 4 мастей номиналом от «двоек» до тузов.*

Решение*: найдём общее число исходов:*

$$C_{52}^5 = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = \frac{48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}{120} = 2598960$$ *способами можно сдать 5 карт.*

а) $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ *способами можно сдать две десятки;*

$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ *способами можно сдать двух валетов;*

Количество других карт в колоде: 52 – 4 – 4 = 44

$C_{44}^1 = 44$ *способами можно сдать другую карту.*

По правилу умножения комбинаций:

$C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^1 = 6 \cdot 6 \cdot 44 = 1584$ *способами можно сдать 5 карт, среди которых будет пара десяток и пара валетов.*

По классическому определению:

$$p = \frac{C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_{44}^1}{C_{52}^5} = \frac{1584}{2598960} \approx 0{,}0006$$

б) В колоде: 52 / 4 = 13 карт каждой масти.

$$C_{13}^5 = \frac{13!}{8! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{120} = 1287$$

способами можно сдать 5 карт какой-то одной из мастей.

По правилу сложения комбинаций:

$$C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5 = 1287 + 1287 + 1287 + 1287 = 5148$$

способами можно сдать флеш (без разницы какой масти).

По классическому определению:

$$p_{\text{ф}} = \frac{C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5 + C_{13}^5}{C_{52}^5} = \frac{5148}{2598960} \approx 0{,}002$$

в) Четыре карты одного номинала можно сдать 13 способами (2222, 3333, 4444, ..., КККК, ТТТТ). Кроме того, ***для каждого*** *из этих 13 случаев пятую карту можно сдать* $C_{48}^1 = 48$ *способами. Таким образом, по теореме умножения комбинаций, каре можно сдать* $13 \cdot C_{48}^1 = 13 \cdot 48 = 624$ *способами.*

По классическому определению:

$$p_{\text{к}} = \frac{13 \cdot C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{624}{2598960} \approx 0{,}0002$$

Ответ: а) $\approx 0{,}0006$, б) $\approx 0{,}002$, в) $\approx 0{,}0002$

Из перечисленных комбинаций вероятнее всего получить флеш.