Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Братский педагогический колледж
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Братский государственный университет»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации по выполнению типового расчета

для студентов
очной и заочной форм обучения
специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование

Автор: Е.А. Пичугина

Братск, 2020

Методические рекомендации по выполнению типового расчета по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов очной и заочной форм обучения/ Сост. Е.А.Пичугина – Братск.: БПК ФГБОУ ВО «БрГУ», 2020 г. – 43 с.

Методические рекомендации по выполнению типового расчета содержат материал для выполнения типового расчета по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика».

Печатается по решению научно-методического совета
Братского педагогического колледжа ФГБОУ ВО «БрГУ»
665709, г. Братск, ул. Макаренко, 40

СОДЕРЖАНИЕ:

Методические рекомендации по решению задач

Задача 1. Элементы комбинаторики

ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение. Перестановкой множества из n элементов называется расположение элементов в определенном порядке. (число объектов остается неизменными, меняется только их порядок)

Так, все различные перестановки множества из трех элементов $\{a, b, c\}$ — это $abc, acb, bac, bca, cab, cba.$

Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n (от начальной буквы французского слова “permutation”, что значит “перестановка”, “перемещение”). Следовательно, число всех различных перестановок вычисляется по формуле

$\mathsf{P}_n = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Пример 1. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Искомое число расстановки 8 ладей

$\mathsf{P}_8 = 8! = 40320.$

РАЗМЕЩЕНИЯ

Пусть у нас есть множество из трех элементов $\{a, b, c\}$. Какими способами мы можем выбрать из этих элементов два? ab, ac, bc, ba, ca, cb.

Определение. Размещениями множества из n различных элементов по m элементов $(m \leq n)$ называются комбинации, которые составлены из данных n элементов по m элементов и отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число всех размещений множества из n элементов по m элементов обозначается через A_m^n (от начальной буквы французского слова “arrangement”, что означает размещение), где $n = 1, 2, \ldots$ и $m = \overline{1, n}$.

Число размещений множества из n элементов по m элементов равно $\mathsf{A}_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1).$

Пример 2. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти цветов?

Решение. Искомое число трехполосных флагов:
$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$

СОЧЕТАНИЯ

Пусть имеется *n* различных объектов. Будем выбирать из них *m* объектов все возможными способами (то есть меняется состав выбранных объектов, но порядок не важен). Получившиеся комбинации называются **сочетаниями** из *n* объектов по *m*

Определение. Сочетаниями из n различных элементов по k элементов называются комбинации, которые составлены из данных nэлементов по k элементов и отличаются хотя бы одним элементом (иначе говоря, k-элементные подмножества данного множества из n элементов).

Как видим, в сочетаниях в отличие от размещений не учитывается порядок элементов. Число всех сочетаний из n элементов по kэлементов в каждом обозначается C_n^k (от начальной буквы французского слова “combinasion”, что значит “сочетание”).

Все сочетания из множества $\{a, b, c, d, e\}$ по два — $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$.

Числа C_n^k

$C_5^2 = 10$

$C_n^0 = 1, C_n^n = 1, C_n^1 = n$.

Свойства чисел C_n^k

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Действительно, каждому k-элементному подмножеству данного n элементного множества соответствует одно и только одно $n - k$-элементное подмножество того же множества.

2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Действительно, мы можем выбирать подмножества из k элементов следующим образом: фиксируем один элемент; число k-элементных подмножеств, содержащих этот элемент, равно C_{n-1}^{k-1}; число k-элементных подмножеств, не содержащих этот элемент, равно C_{n-1}^k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (0 \le k \le n)$$

Пример 3. Сколькими способами можно в игре СПОРТЛОТО выбрать 5 номеров из 36?

Искомое число способов $C_{36}^{5} = \frac{36!}{5!31!} = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992.$

Задача 2. Классическое определение вероятности события

Пусть

n - число всех равновозможных элементарных исходов некоторого опыта, образующих полную группу.

k - число исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию А.

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}$$ ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ

СВОЙСТВА:

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. ВЕРОЯТНОСТЬ НЕВОЗМОЖНОГО СОБЫТИЯ РАВНА 0.
$$P(\varnothing) = 0$$
3. ВЕРОЯТНОСТЬ ДОСТОВЕРНОГО СОБЫТИЯ РАВНА 1.
$$P(\Omega)=1$$

Пример 1. Из десяти билетов лотереи выигрышными являются три. Найти вероятность того, что из пяти взятых наудачу билетов, два окажутся выигрышными.

Решение. Событие А - из пяти наудачу взятых билетов два выигрышных. Число всех возможных исходов равно числу всех возможных комбинаций по пять билетов. Порядок в этих комбинациях неважен и их количество равно числу сочетаний из 10 по 5.Число исходов, благоприятствующих данному событию А, состоит из количества комбинаций из выигрышных билетов по 2 в сочетании с комбинациями из невыигрышных билетов по 3. Таким образом, число всех возможных исходов: $n = C_{10}^{5}$, а число исходов, благоприятствующих данному событию, $k = C_3^2 \cdot C_7^3$,

тогда вероятность события равна $P(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{5}{12}$.

Пример 2. 10 вариантов контрольной работы тщательно перемешаны и распределены между 8 студентами, сидящими в одном ряду. Найти вероятность того, что выданными окажутся первые восемь вариантов.

Решение. Событие А «Выданными окажутся первые восемь вариантов». Число всех возможных исходов равно числу размещений из десяти по восемь. Число исходов, благоприятствующих событию А, равно числу перестановок из восьми. Вероятность события А.

$$P(A) = \frac{P_8}{A_{10}^8} = \frac{8!2!}{10!} = \frac{2}{9 \cdot 10} = \frac{1}{45}.$$

Задача 3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Рассмотрим <u>**зависимое событие**</u> A, которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных ***гипотез*** $B_1, B_2, B_3, .., B_n$, которые образуют <u>**полную группу**</u>. Пусть известны их вероятности $P(B_1), P(B_2), P(B_3), .., P(B_n)$ и соответствующие условные вероятности $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), P_{B_3}(A), .., P_{B_n}(A)$. Тогда вероятность наступления события A равна:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Пример 1. Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные шары. Наудачу выбирается одна урна и из неё наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар чёрный?

Решение: рассмотрим событие A – из наугад выбранной урны будет извлечён чёрный шар. Данное событие может произойти в результате осуществления одной из следующих гипотез:

B_1 – будет выбрана 1-я урна; B_2 – будет выбрана 2-я урна; B_3 – будет выбрана 3-я урна.

Так как урна выбирается наугад, то выбор любой из трёх урн **<u>равновозможен</u>**, следовательно: $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$

Обратите внимание, что перечисленные гипотезы образуют **<u>полную группу событий</u>**, то есть по условию чёрный шар может появиться только из этих урн, а например, не прилететь с бильярдного стола. Проведём простую промежуточную проверку: $P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$,

В первой урне 4 белых + 7 черных = 11 шаров, по **<u>классическому определению</u>**: $P_{B_1}(A) = \frac{7}{11}$ – вероятность извлечения чёрного шара **при условии**, что будет выбрана 1-я урна.

Во второй урне только белые шары, поэтому **в случае её выбора** появления чёрного шара становится *невозможным*: $P_{B_2}(A) = 0$.

И, наконец, в третьей урне одни чёрные шары, а значит, соответствующая **<u>условная вероятность</u>** извлечения чёрного шара составит $P_{B_3}(A) = 1$ *(событие достоверно)*.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) =$$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{11} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{7}{33} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{18}{33} = \frac{6}{11}$ – вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечен чёрный шар.

Ответ: $\frac{6}{11}$

При условии, что событие A **уже произошло**, вероятности гипотез *переоцениваются* по формулам, которые получили фамилию английского священника Томаса Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_1;

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)}$$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_2;

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)}$$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_3;

$$P_A(B_n) = \frac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)}$$ – вероятность того, что имела место гипотеза B_n.

$P(B_1), P(B_2), P(B_3), .., P(B_n)$ – это *априорные* (оцененные **до** испытания) вероятности.

$P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), .., P_A(B_n)$ – это *апостериорные* (оцененные **после** испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи «со вновь открывшимися обстоятельствами » – с учётом того факта, что событие A **достоверно произошло**.

Пример 2. На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Первая часть **решения** состоит в использовании формулы полной вероятности. Иными словами, вычисления проводятся в предположении, что испытание <u>ещё не произведено</u> и событие *«изделие оказалось стандартным»* пока не наступило.

Рассмотрим две гипотезы: B_1 – наудачу взятое изделие будет из 1-й партии; B_2 – наудачу взятое изделие будет из 2-й партии.

Всего: 4000 + 6000 = 10000 изделий на складе. По **<u>классическому определению</u>**:

$$P(B_1) = \frac{4000}{10000} = 0{,}4; \quad P(B_2) = \frac{6000}{10000} = 0{,}6.$$

Контроль: $P(B_1) + P(B_2) = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$

Рассмотрим зависимое событие: A – наудачу взятое со склада изделие <u>будет</u> стандартным.

В первой партии 100% – 20% = 80% стандартных изделий, поэтому: $P_{B_1}(A) = \frac{80}{100} = 0{,}8$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 1-й партии.

Аналогично, во второй партии 100% – 10% = 90% стандартных изделий и $P_{B_2}(A) = \frac{90}{100} = 0{,}9$ – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 2-й партии.

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}9 = 0{,}32 + 0{,}54 = 0{,}86$$

– вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным.

Часть вторая. Пусть наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Эта фраза прямо прописана в условии, и она констатирует тот факт, что событие A **произошло**.

По формулам Байеса:

а) $$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}8}{0{,}86} = \frac{0{,}32}{0{,}86} = \frac{32}{86} = \frac{16}{43} \approx 0{,}37$$

– вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 1-й партии;

б)

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}9}{0{,}86} = \frac{0{,}54}{0{,}86} = \frac{54}{86} = \frac{27}{43} \approx 0{,}63$$

– вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 2-й партии.

После *переоценки* гипотезы B_1, B_2, разумеется, по-прежнему образуют **полную группу**:

$$P_A(B_1) + P_A(B_2) = \frac{16}{43} + \frac{27}{43} = \frac{43}{43} = 1$$

(проверка ;-))

Ответ: а) $\frac{16}{43} \approx 0{,}37$; б) $\frac{27}{43} \approx 0{,}63$

Задача 4. Повторение испытаний

Проводится серия из n испытаний. Вероятность появления события A в каждом испытании одинакова и равна p. Вероятность того, что событие в серии из n испытаний появилось ровно k раз вычисляется по

ФОРМУЛЕ БЕРНУЛЛИ

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}}\text{, } n \le 20,\ q = 1 - p$$

Если количество испытаний n достаточно велико, то вероятность появления события в этой серии испытаний ровно k раз вычисляется с помощью

ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ МУАВРА-ЛАПЛАСА

$$\boxed{P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\cdot \varphi(x), \quad \text{, где} \quad x = \frac{k - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}$ - локальная функция Лапласа

$\varphi(-x) = \varphi(x)$

значения $\varphi(x)$ находят по **Таблице значений локальной функции Лапласа**;

Более k раз, не более k раз, менее k раз, не менее k раз, от k_1 до k_2 раз вычисляется с помощью

ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ МУАВРА-ЛАПЛАСА

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \text{ , где } x_i = \frac{k_i - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ - интегральная функция Лапласа

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$

значения $\Phi(x)$ находят по **Таблице значений интегральной функции Лапласа**.

Если вероятность события А очень мала $p \to 0$ (закон редких событий), то вероятность появления события в n испытаниях ровно k раз вычисляется по

ФОРМУЛЕ ПУАССОНА

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \text{ , где } \lambda = n \cdot p$$

Пример 1. В цехе 6 моторов. Вероятность работы каждого из них в течение смены равна 0.8. Найдите вероятность того, что без аварии смену проработают: а) 4 мотора; б) не менее двух моторов.

Решение. 6 моторов, установленные в цехе можно рассматривать как повторение испытаний. Вероятность работы каждого одинакова $\Rightarrow$ применим формулу Бернулли.

а) $n = 6$, $k = 4$, $p = 0.8$, $q = 0.2$

$$P_6(4) = C_6^4 * (0.8)^4 * (0.2)^2 = 0.246$$

б) Этот пункт проще решать, используя противоположное событие.

$$P_6(2) = P_6(2) + P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) =$$

$$1 - P_6(< 2) = 1 - \left(P_6(0) + P_6(1)\right) =$$

$$1 - (0.2)^6 - C_6^1 * 0.8 * (0.2)^5 = 0.9984$$

Пример 2. Вероятность того, что случайно встреченный Вами человек не имеет музыкального слуха, равна 0.2. найдите вероятность того, что из 400 детей, поступивших в музыкальную школу, 104 не имеют музыкального слуха.

Решение: Проверка слуха у 400 детей - повторение испытаний. Вероятность отсутствия музыкального слуха одинакова для всех детей и количество испытаний достаточно велико $\Rightarrow$локальная теорема Муавра-Лапласа. n = 400, k = 104, p = 0.2, q = 0.8.

$$x = \frac{104 - 400*0.2}{\sqrt{400*0.2*0.8}} = 0.2631$$

По Таблице находим $\varphi(x)$=0.3857,

и тогда $P_{400}(104) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = 0.0042$.

Пример 3. Вероятность поражения стрелком мишени при одном выстреле равна 0.75. найдите вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 и не более 80 раз.

Решение: производится 100 выстрелов - повторение испытаний.

n = 100, k_1 = 70, k_2 = 80, p = 0.75, q = 0.25

$$P_{100}(70;80) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$$

$$x_1 = \frac{70 - 100*0.75}{\sqrt{100*0.75*0.25}} = -1.15$$

$$x_2 = \frac{80 - 100*0.75}{\sqrt{100*0.75*0.25}} = 1.15$$

По Таблице находим Ф(1.15) = 0.3749.

$$P_{100}(70;80) = \Phi(1.15) - \Phi(-1.15) = 0.7498$$

Пример 4. Какова вероятность того, что среди 500 наугад выбранных человек двое родились $1^{\text{-го}}$ мая ?

Решение: Естественно считать, что день рождения незнакомого человека может быть с равной вероятностью любым днем года $p = \dfrac{1}{365} \to 0$. Поэтому применим теорему Пуассона.

Здесь n = 500 $\Rightarrow \lambda = n \cdot p = \dfrac{500}{365}$

$$P_{500}(k = 2) \approx \frac{1.3699^2}{2!} \cdot e^{-1.3699} \approx 0.2385$$

Пример 5. На стенде установлено 15 приборов. Вероятность того, что прибор выдержит испытание равна 0.9. найти вероятнейшее число приборов, которые выдержат испытание.

Решение: наивероятнейшее число событий определяют с помощью двойного неравенства

$np - q \le k \le np + p$

$n = 15$, $p = 0.9$, $q = 0.1$.

Подставим данные в формулу

$1.5 * 0.9 - 0.1 \le k \le 1.5 * 0.9 + 0.9$

$13.5 \le k \le 14.4$

Так как k- целое число и поскольку между числами 13.5 и 14.4 заключено только одно целое число, то искомое наивероятнейшее число равно14.

Задача 5. Случайные величины. Характеристики случайных величин.

Пример 1. В ящике 2 нестандартные и 4 стандартные детали. Из него последовательно вынимают детали до первого появления стандартной детали. Построить ряд и многоугольник распределения ДСВ X - числа извлеченных деталей.

Решение.

Рассмотрим все возможные значения, которые может принимать случайна величина (СЛ) X:

$x_1 = 1$ - первой вынули стандартную деталь;

$x_2 = 2$ - первая вынутая деталь нестандартная, вторая стандартная;

$x_3 = 3$ - первая деталь нестандартная, вторая деталь нестандартная, третья деталь стандартная.

Соответствующие им вероятности p_1, p_2, p_3 найдем воспользовавшись правилом умножения вероятностей (заметьте, что события зависимы):

$$p_1 = P\{X = x_1 = 1\} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

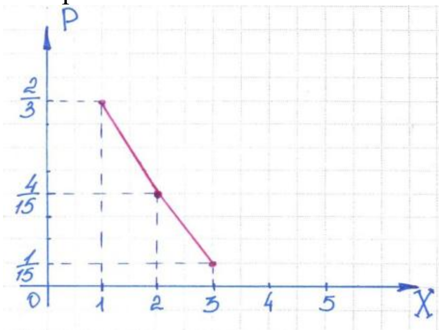
$$p_2 = P\{X = x_2 = 2\} = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$$p_3 = P\{X = x_3 = 3\} = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{15}$$

Тогда закон распределения дискретной случайной величины **X** примет вид:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

Построим многоугольник распределения, отложив на оси абсцисс (OX) значения ДСВ X, а на оси ординат (OY) соответствующие им вероятности:



Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения x_1, x_2, ..., x_n, вероятности которых соответственно равны p_1, p_2, . . ., p_n. Тогда математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X определяется равенством

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Замечание. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. Рекомендуем запомнить это утверждение, так как далее оно используется многократно. В дальнейшем будет показано, что математическое ожидание непрерывной случайной величины также есть постоянная величина.

Пример 2. Найти математическое ожидание случайной величины *X*, зная закон ее распределения:

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

M(*X*)=3*0,1+5*0,6+2*0,3=3,9.

Дисперсия случайной величины – (*D*(*X*)) – определяет среднюю величину квадрата отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания.

Вычисление дисперсии:

$D(X) = M(X - M(X))^2$ или D(X)=M(X^2)-M^2(X)

или

для д.с.в. для н.с.в.

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \qquad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx$$

или

$$D(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot p_i - M^2(X) \qquad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X)$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$
2. $D(CX) = C^2 D(X)$
3. $D(C + X) = D(X)$
4. $D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)$.

Среднее квадратическое отклонение – ($\sigma(X)$) – характеристика рассеивания, средняя величина отклонения значения случайной величины от ее математического ожидания - $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Свойства среднего квадратического отклонения:

1. $\sigma(CX) = C\sigma(X)$
2. $\sigma(X + C) = \sigma(X)$

Теоретические моменты – характеристики деформации случайной величины.

Начальный момент k-го порядка случайной величины *X* есть математическое ожидание величины X^k:

Вычисление: $\nu_k = M(X^k)$

для д.с.в.:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{s} x_i^k \cdot p_i$$

для н.с.в.:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

В частности, $\nu_1 = M(X)$.

Центральный момент k-го порядка случайной величины *X* есть математическое ожидание величины $\left(X - M(X)\right)^k$:

Вычисление: $\mu_k = M\left(X - M(X)\right)^k$

для д.с.в.:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{s} (x_i - M(X))^k \cdot p_i$$

для н.с.в.:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - M(X)\right]^k f(x)dx$$

В частности,

$\mu_1 = M\left(X - M(X)\right) = 0;\ \mu_2 = M\left(X - M(X)\right)^2 = D(X)$.

Связь начальных и центральных моментов:

$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;$

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3;$

$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$.

Моменты более высоких порядков применяются редко.

Пример 3. Известен закон распределения дискретной случайной величины *X*:

X	-4	6	10
P_i	p_1	0,3	0,5

Найти p_1, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

РЕШЕНИЕ: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Rightarrow p_1 = 1-(0{,}3+0{,}5) = 0{,}2$;

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = -4\cdot 0{,}2 + 6\cdot 0{,}3 + 10\cdot 0{,}5 = 6;$$

X	16	36	100
P_i	0,2	0,3	0,5

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 16\cdot 0{,}2 + 36\cdot 0{,}3 + 100\cdot 0{,}5 - 36 = 28$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{28} \approx 5{,}29.$$

Задача 6. Законы распределения случайных величин

1. ***Равномерное распределение.***

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} = const,\ x \in (a;b) \\ 0,\ x \notin (a;b) \end{cases}; \qquad F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a},\ a < x \le b \\ 1,\ x > b \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2};\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};\ \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}};$$

$$P(a \le \alpha < X < \beta \le b) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

Пример 1. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

РЕШЕНИЕ. Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность равномерного распределения $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, где (b - a) есть длина интервала, в котором заключены возможные значения X, вне этого интервала $f(x) = 0$. Таким образом, $f(x) = \begin{cases} 0,\ x \notin (0;0{,}1) \\ 10,\ x \in (0;0{,}1) \end{cases}$.Тогда ошибка отсчета превысит 0,02, если она окажется в интервале (0,02; 0,08). По формуле $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ получим $P(0{,}02 < X < 0{,}08) = \int\limits_{0{,}02}^{0{,}08} 10dx = 0{,}6$

2. Показательное распределение

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0 \\ 0, \ x \le 0 \end{cases}; \qquad F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, \ x \ge 0 \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \qquad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda};$$

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Пример *2.* Найти плотность и функцию распределения показательного закона при $\lambda = 5$.

Решение. Подставляя параметр λ в функцию плотности показательного распределения, получим

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 5e^{-5x}, \ x \ge 0 \end{cases}$$

$F(x) = \int\limits_0^x f(x)dx = \int\limits_0^x 5e^{-5x}dx = -e^{-5x}\Big|_0^x = 1 - e^{-5x}$. Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1 - e^{-5x}, \ x \ge 0 \end{cases}$$

3. Нормальное распределение $X = N(a, \sigma^x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$M(X) = a; \qquad D(X) = \sigma^2; \qquad \sigma(X) = \sigma;$$

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - функция Лапласа.

Пример 3. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания случайной величины X примет значение в интервале (12; 14).

РЕШЕНИЕ. По формуле $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ получим $P(12 < x < 14) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359.$

Задача 7. Математическая статистика

Пример 1. В течение месяца ежедневно тщательно изучался расход горючего на автопредприятии. В результате получены данные: 102,256; 78,235; 95,624, 69,124; 112,352; 108,781; 119,546; 86,325; 89,126; 97,563; 101,325; 62,358; 110,256; 99,325; 103,651; 107,896; 111,238; 68,265; 72,348; 76,158; 97,589; 105,465; 88,658; 96,102; 112,325; 124,852; 106,324; 119,521; 114,368; 120,563.

Построить равномерный интервальный ряд из семи интервалов, гистограмму и функцию плотности распределения.

Решение. Найдем наибольшее и наименьшее значения в выборке: x_{max}=124,852, x_{min}=62,358. Размах выборки равен 124,852-62,358=62,494

Вычислим длину каждого элементарного интервала:

$\Delta x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{\mathrm{k} - 1}$ =62,494/6≈10,416, здесь k=7 – количество задаваемых интервалов;

$x_{лев} = x_{\min} - \Delta x/2$ =x_1=62,358-10,416/2=62,358-5,208=57,15;

$x_{прав} = x_{\max} + \Delta x/2$ =124,852+10,416/2=124,852+5,208=130,06;

остальные границы рассчитываются по формуле $x_i = x_{i-1} + \Delta x$:

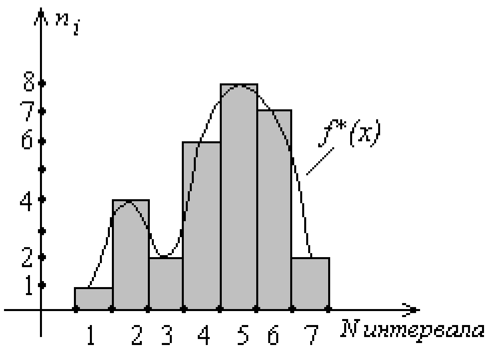
x_2=57,15+10,416=67,566; x_3=67,566+10,416=77,982; x_4=88,398; x_5=98,814; x_6=109,23; x_7=119,646; x_8=130,062.

Подсчитываем количество вариант, попадающих в каждый из интервалов (интервальные частоты): в первый интервал (между значениями x_1=57,15 и x_2=67,566) попадает всего 1 варианта, во второй – 4, в третий – 2, в четвертый – 6, в пятый – 8, в шестой – 7, в седьмой – 2. (Проверьте).

Строим интервальный ряд:

N инт	$x_i;x_{i+1}$	n_i
1	57,15; 67,566	1
2	67,566;77,982	4
3	77,982; 88,398	2
4	88,398; 98,814	6
5	98,814; 109,23	8
6	109,23; 119,646	7
7	119,646; 130,062	2

Объем выборки – 30. Сумма интервальных частот тоже равна 30, Следовательно, частоты подсчитаны верно. Гистограмма и эмпирическая функция плотности распределения представлены на рисунке.



Пример 2. Из ГС извлечена выборка объема n=50

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти несмещенную оценку генеральной средней, оценку генеральной дисперсии и исправленную оценку генеральной дисперсии.

Решение. Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя, т.е.

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i = (2\cdot 16 + 5\cdot 12 + 7\cdot 8 + 10\cdot 14)/50 = 5.76$$

Оценкой генеральной дисперсии является выборочная дисперсия

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_i x_i^2 n_i - (\bar{x}_B)^2 = \frac{4\cdot 16 + 25\cdot 12 + 49\cdot 8 + 100\cdot 14}{50} - (5.76)^2 =$$

$$= 43.12 - 33.17 = 9.95$$

Соответственно, исправленной оценкой генеральной дисперсии является величина:

$$D_B^* = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{50}{49}\cdot 9.95 = 10.15$$

$$\sigma_B^* = \sqrt{D_B^*} = \sqrt{10.15} = 3.186\,.$$

ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

Вариант 1

1. Среди 25 деталей, подвергаемых проверке, 21 точная. Какова вероятность того, что из 10 наудачу взятых деталей окажется 8 точных ?

2. В корзинке 8 шаров белого цвета и 6 черного. Из корзины вынимают поочередно без возврата два шара. Найдите вероятность того, что первым будет вынут белый шар, а затем черный.

3. Первый рабочий изготовил за смену 120 изделий, второй - 140. Вероятность того, что первый рабочий выпустил изделие высшего сорта равна 0.94, второй - 0.8. Определите вероятность того, что наудачу взятое изделие - высшего сорта.

4. Учебник издан тиражом 150000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно равна 0.00015. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 10 бракованных книг.

5. Снайпер стреляет из винтовки 5 раз. Вероятность попадания в цель - 0,8. Случайная величина X - разность между количеством попаданий и промахов. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Время безотказной работы трех основных блоков некоего аппарата распределено по показательному закону с параметрами 0,03, 0,02 и 0,05 соответственно. Для выхода из строя этого аппарата достаточно, чтобы не работал хотя бы один элемент. Найдите вероятность того, что в течение 8 часов аппарат не выйдет из строя.

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Из текущей продукции токарного станка, изготавливающего валики, отобрано для анализа распределения диаметров 50 валиков. Получены следующие данные (в мм): 20, 15, 17, 19, 23, 18, 21, 15, 16, 13, 20, 16, 19, 20, 14, 20, 16, 14, 20, 19, 15, 19, 17, 16, 15, 22, 21, 12, 10, 21, 18, 14, 14, 18, 18, 13, 19, 18, 20, 23, 16, 20, 19, 17, 19, 17, 21, 17, 19, 13.

Вариант 2

1 На карточках написаны числа от 1 до 100. Найти вероятность того, что на случайно выбранной карточке содержится цифра 3.

2 Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из трех зон. Вероятность попадания в первую зону равна 0.5, во вторую - 0.65,. в третью - 0.4. найдите вероятность промаха по мишени.

3 Литье болванок поступает из I, II и III цехов в отношении 5:3:2. При этом материал первого цеха содержит 0.8 % брака, второго - 0.6 %, третьего - 0.4 %. Найдите вероятность того, что наудачу взятая болванка не имеет дефектов.

4 Вероятность того, что элитное зерно поражено гнилью равна 0.2. Найдите вероятность того, что из 5400 зерен, взятых для посева на опытной деляне, 75 поражены гнилью.

5 Среди 6 купленных пирожков - 2 без мяса. Вы отдали другу 4 пирожка. Случайная величина X - число пирожков с мясом у друга. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6 Среди молодых людей вошли в моду брюки с шириной 50 см в колене. Фирма изготавливает брюки, где ширина - нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением 3 см. Какова должна быть реальная ширина сшитых брюк, чтобы с вероятностью 0,9901 эти брюки раскупались?

7 Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Из текущей продукции токарного станка, изготавливающего валики, отобрано для анализа распределения диаметров 50 валиков. Получены следующие данные (в мм): 38, 60, 41, 51, 33, 42, 45, 21, 53, 60, 68, 52, 47, 46, 49, 49, 14, 57, 54, 59, 77, 47, 28, 48, 58, 32, 42, 58, 61, 30, 61, 35, 47, 72, 41, 45, 44, 55, 30, 40, 67, 65, 39, 48, 43, 60, 54, 42, 59,50.

Вариант 3

1. В группе 12 студентов, среди которых 5 отличников. По списку наудачу отобраны 3 студента. Найти вероятность того, что а) все они отличники; б) среди трех студентов только один отличник.

2. Вероятность поражения мишени для некоторого стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0.5. Найдите вероятность поражения второй мишени.

3. На первой лесосеке работает 10 лесовозов, из которых 2 требуют ремонта. На второй - 6 лесовозов, из которых 1 требует ремонта. На вторую лесосеку был отправлен лесовоз. А затем со второй лесосеки один лесовоз отправили в мастерские за запчастями. Найдите вероятность того, что этот лесовоз не требует ремонта.

4. Вероятность того, что бревно, привезенное на лесопилку стандартно, равна 0.8. Найдите вероятность того, что из 100 бревен не менее 75 и не более 90 стандартны.

5. Производится залп из трех орудий. Вероятность попадания из одного орудия – 0,9.. Случайная величина X - число попаданий. Составьте закон распределения случайной величины, постройте

многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Средняя дальность полета снаряда 140 м. Предполагая, что дальность полета - случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 80м, найдите какой процент снарядов упадет на расстоянии не ближе 120 и не далее 160м.

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Из текущей продукции токарного станка, изготавливающего валики, отобрано для анализа распределения диаметров 50 валиков. Получены следующие данные (в мм): 48, 70, 51, 61, 43, 52, 55, 31, 63, 70, 78, 62, 57, 56, 59, 59, 24, 67, 64, 69, 87, 57, 38, 58, 68, 42, 52, 68, 71, 40, 71, 45, 57, 82, 51, 55, 54, 65, 40, 50, 77, 75, 49, 58, 53, 70, 64, 52, 69, 60.

Вариант 4

1. В инструментальном ящике находится 15 стандартных и 5 бракованных деталей. Из ящика наугад вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что эта деталь стандартна.

2. В приборе имеется три независимо установленных сигнализатора об аварии. Вероятность того, что в случае аварии сработает первый равна 0.85, второй - 0.8, третий - 0.9. Найдите вероятность того, что при аварии не сработает ни один сигнализатор.

3. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено с первого курса - 4 студента, со второго - 6, а с третьего - 5. Вероятности того, что студент попадает в

сборную института равны 0.9, 0.7 и 0.8 соответственно для студентов I, II и III курсов. Студент, выбранный наудачу по спискам, в итоге соревнования попал в сборную. С какого курса вероятнее всего этот студент ?

4. Вероятность того, что шестерня механических часов имеет заусеницы, равна 0.3. Найдите вероятность того, что из 2100 шестерен, поступивших на сборку не более 1470 имеют заусеницы.

5. В складском помещении находится 18 телевизоров, из которых 5 дефектны А какие - неизвестно). Наудачу для проверки выбрали 4 телевизора. Случайная величина X - количество дефектных телевизоров среди выбранных. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Совхоз приобрел два уборочных комбайна разных типов. Время их безотказной работы распределено по показательному закону с параметрами 0,002 и 0,005 соответственно. Какова вероятность того, что оба они в первые три года эксплуатации выйдут из строя?

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Из текущей продукции токарного станка, изготавливающего валики, отобрано для анализа распределения диаметров 50 валиков. Получены следующие данные (в мм): 38, 68, 77, 61, 67, 60, 52, 47, 35, 65, 41, 47, 28, 47, 39, 51, 46, 48, 72, 48, 33, 49, 58, 41, 43, 42, 49, 32, 45, 60, 45, 14, 42, 44, 54, 21, 57, 58, 55, 42, 53, 54, 61, 30, 59, 60, 59, 30, 40, 50.

Вариант 5

1. В партии из 10 деталей 7 стандартны. Найти вероятность того, что из 6 наудачу взятых деталей а) 4 стандартные; б) 4 стандартные либо 3 стандартные детали.

2. В ящике 7 белых и 9 черных шаров. Наудачу вынимают шар и возвращают. Затем снова вынимают шарик. Какова вероятность, что оба шара белые ?

3. Рабочий и его ученик выполняют одну и ту же работу. Скорость рабочего в два раза выше, чем у его ученика. Все детали складываются в общий ящик. Брак, допускаемый рабочим составляет 5%, учеником - 15%. Из ящика наудачу взяли деталь, которая оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что эта деталь сделана учеником.

4. 10000 шариков произвольно распределяются по 9 ящикам. Какова вероятность того, что в первом ящике не менее1100 и не более 1200 шариков ?

5. Из коробки с 28 костяшками домино берется 8 костей. Случайная величина X - число дублей среди выбранных. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Проектные размеры изготавливаемых на фабрике штор 300х200см. При этом возможны отклонения по длине - 5 см, а по ширине - 2см. Считая размеры шторы случайной величиной, распределенной по нормальному закону, найдите вероятность того, что размеры наугад взятой шторы превысят проектные: по длине на 7 см, а по ширине - 5см.

7. . Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

- ✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.
- ✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.
- ✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Из текущей продукции токарного станка, изготавливающего валики, отобрано для анализа распределения диаметров 50 валиков. Получены следующие данные (в мм): 43, 73, 82, 66, 72, 65, 57, 52, 40, 70, 46, 52, 43, 52, 44, 56, 51, 53, 77, 53, 38, 54, 63, 46, 48, 47, 54, 37, 50, 65, 50, 19, 47, 49, 59, 26, 62, 63, 60, 47, 58, 59, 66, 35, 64, 65, 64, 35, 45,55.

Вариант 6

1. В группе 12 студентов, среди которых 5 отличников. По списку наудачу отобраны 3 студента. Найти вероятность того, что а) все они отличники; б) среди трех студентов только два отличника.
2. Какова вероятность появления хотя бы одного герба при подбрасывании двух монет ?
3. Из ящика с 6 белыми и 3 черными шарами наудачу взяты два шара и переложены в ящик с 5 белыми и 7 черными шарами. А затем из второго ящика вынут один шар. Найдите вероятность, что этот шар белый.
4. Игральную кость бросаем 12000 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится не менее 900 и не более 2100 раз?
5. Производится два залпа из трех орудий. Вероятность попадания в мишень для первого - 0,9, для второго - 0,7, для третьего - 0,6. Случайная величина X - сумма попаданий. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.
6. Вам подарили стиральную машину и пылесос. Время их безотказной работы распределено по показательному закону с параметрами 0,001 и 0,005 соответственно. Найдите вероятность того, что в первые 10 месяцев эксплуатации один из приборов выйдет из строя.
7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Изучены затраты на производство продукции на 50 предприятиях производственного объединения. Получены следующие данные (в тыс.руб.): 23, 53, 62, 46, 52, 45, 37, 32, 20, 50, 26, 32, 23, 32, 24, 36, 31, 33, 57, 33, 18, 34, 43, 26, 28, 27, 34, 17, 30, 45, 30, 19, 27, 29, 39, 16, 42, 43, 40, 27, 38, 39, 46, 15, 44, 45, 44, 15, 25,35.

Вариант 7

1. Одновременно брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков: а) не меньше пяти; б) равна 7
2. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что вынуты валет и дама.
3. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0.1% бракованных, со второго - 0.2%, с третьего - 0.25%, с четвертого - 0.5%. Производительности их относятся как 4:3:2:1. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что она изготовлена на третьем станке.
4. Вероятность рождения мальчика 0.515. Какова вероятность того, что среди тысячи новорожденных не менее 490 и не более 530 мальчиков ?
5. Два баскетболиста выполнили по три броска в кольцо. Вероятность попадания одним - 0,6, вторым - 0,7. Случайная величина X - сумма попаданий. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.
6. В дисплейный класс поступили три компьютера одной фирмы. Время безотказной работы для них подчинено показательному закону распределения с параметром 0,001. Какова вероятность того, что в период от 900 до 1000 часов эксплуатации все они одновременно выйдут из строя?

7. . Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Изучены затраты на производство продукции на 50 предприятиях производственного объединения. Получены следующие данные (в тыс.руб.): 73, 103, 112, 96, 102, 95, 87, 82, 70, 100, 76, 82, 73, 82, 74, 86, 81, 83, 107, 83, 68, 84, 93, 76, 78, 77, 84, 67, 80, 95, 80, 69, 77, 79, 89, 66, 92, 93, 90, 77, 88, 89, 96, 65, 94, 95, 94, 65, 75, 85.

Вариант 8

1. Среди 16 деталей, подвергаемых проверке, 13 точных. Какова вероятность того, что из 10 наудачу взятых деталей окажется 8 точных ?

2. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что две карты пиковой масти.

3. Из полного набора домино наудачу взяты две кости и отложены в сторону, затем из этой же коробки вынули кость, которая оказалась дублем. Найдите вероятность того, что первые кости не были дублями.

4. В каждом из 1000 ящиков 5000 белых и столько же черных шариков. Из каждого ящика наугад вынимаются по 3 шара. Какова вероятность того, что число ящиков, из которых вынуты 3 шара одного цвета не меньше чем 200 и не больше чем 310 ?

5. Вероятность получить неудовлетворительную оценку на повторном экзамене для каждого пересдающего из первой группы потока - 0,4, для студентов второй группы - 0,3. На переэкзаменовку пришли 2 студента из одной группы и три студента из другой. Случайная величина X - сумма неудовлетворительных оценок. Составьте закон распределения

случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Длительность времени безотказной работы электрической печи распределена по показательному закону с параметром 0,005. Найдите приближенно тот порог времени работы в годах, после которого вероятность поломки превысит 0,8.

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Изучены затраты на производство продукции на 50 предприятиях производственного объединения. Получены следующие данные (в тыс.руб.): 158, 188, 197, 181, 187, 180, 172, 167, 155, 185, 161, 167, 148, 167, 159, 171, 166, 168, 192, 168, 153, 169, 178, 161, 163, 162, 169, 152, 165, 180, 165, 134, 162, 164, 174, 141, 177, 178, 175, 162, 173, 174, 181, 150, 179, 180, 179, 150, 160, 170.

Вариант 9

1. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. В билете два вопроса. Найти вероятность того, что а) наудачу взятый билет содержит только подготовленные вопросы; б) студент знает только один вопрос; в) студент не ответил на билет.

2. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что вынуты два валета

3. 5 студентов группы учатся отлично, 6 не имеют троек и 7 имеют различные оценки. Вероятность отличнику получить "5" на экзамене по математике равна 0.9, для хорошистов эта вероятность

равна 0.5, а для остальных 0.2. Найти вероятность того, что первый сдавший студент получил отлично.

4. Бросаем монету 40 раз. Чему равна вероятность того, что герб появится 25 раз ?

5. В наборе 6 новогодних игрушек. Вероятность того, что при транспортировке игрушка разобьется равна 0,3. Случайная величина X - число целых игрушек в наборе. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20г. Какова вероятность того, что при трех независимых взвешиваниях ошибка в двух случаях не превысит 5г?

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

- ✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.
- ✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.
- ✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.
- ✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Изучены затраты на производство продукции на 50 предприятиях производственного объединения. Получены следующие данные (в тыс.руб.): 128, 158, 167, 151, 157, 150, 142, 137, 125, 155, 131, 137, 118, 137, 129, 141, 136, 138, 162, 138, 123, 159, 148, 131, 133, 132, 139, 122, 135, 150, 135, 104, 132, 134, 144, 111, 147, 148, 155, 132, 143, 144, 151, 120, 149, 150, 149, 130, 140, 155.

Вариант 10

1. На карточках написаны числа от 1 до 100. Найти вероятность того, что на случайно выбранной карточке содержится цифра 7.

2. Какова вероятность того, что четыре очка выпадут подряд при трехкратном подбрасывании кубика.

3. Два зенитных орудия ведут огонь по одному и тому же самолету. Вероятность попадания из первого орудия 0.2, из второго - 0.6. Первым залпом в самолет попали только из одного орудия. Какова вероятность того, что промахнулся расчет первого орудия ?

4. Какова вероятность того, что среди 1500 наугад выбранных лиц ни один не родился 17 сентября.

5. Снайпер стреляет из винтовки 5 раз. Вероятность попадания в цель - 0,8. Случайная величина X - сумма количества попаданий и количества промахов. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 5 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=2мм. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

- ✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.
- ✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.
- ✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.
- ✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Изучены затраты на производство продукции на 50 предприятиях производственного объединения. Получены следующие данные (в тыс.руб.): 58, 110, 91, 101, 83, 92, 95, 71, 103, 110, 118, 102, 97, 96, 99, 99, 64, 107, 104, 109, 127, 97, 78, 98, 108, 82, 92, 108, 111, 80, 111, 85, 97, 122, 91, 95, 94, 105, 80, 90, 117, 115, 89, 98, 93, 110, 94, 92, 109, 100.

Вариант 11

1 В корзине находится восемь белых и 5 черных шаров. Наудачу вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что не менее двух из них белые.

2. Военный летчик должен уничтожить 3 рядом стоящих склада с боеприпасами противника. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0.01, во второй - 0.008, в третий - 0.025. Любое попадание вызывает взрыв других складов. Найти вероятность того, что склады противника будут уничтожены.

3. Трое рабочих выпускают продукцию в отношении 3:5:4. Первый выпускает 1% брака, второй - 3%, третий - 2%. Наудачу взятое изделие оказалось стандартным. Найдите вероятность того, что оно выпущено вторым рабочим.

4. Какова вероятность того, что среди 1010 наугад выбранных лиц трое родились 15 июня?

5. Среди 7 купленных пирожков - 3 без мяса. Вы отдали другу 4 пирожка. Случайная величина X - число пирожков с мясом у друга. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Среди молодых людей вошли в моду брюки шириной 40см в колене. Фирма изготавливает брюки, где ширина - нормально распределенная случайная величина со средним квадратическим отклонением 2 см. Какова должна быть реальная ширина сшитых брюк, чтобы с вероятностью 0,92 эти брюки раскупались?

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

- ✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.
- ✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.
- ✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.
- ✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

В результате опроса больных во время эпидемии гриппа получены следующие данные об их возрасте в годах: 20, 17, 23, 21, 16, 20, 19, 14, 16, 20, 15, 17, 15, 21, 10, 18, 14, 18, 19, 20, 16, 19, 19, 21, 19, 15, 19, 18, 15, 13, 16, 20, 20, 14, 19, 19, 16, 22, 12, 21, 14, 18, 13, 18, 23, 20, 17, 17, 17, 13.

Вариант 12

1. Из десяти билетов лотереи выигрышными являются три. Найти вероятность того, что из пяти взятых наудачу билетов, два окажутся выигрышными.
2. В корзинке 5 шаров белого цвета и 7 красного. Из корзины вынимают поочередно без возврата два шара. Найдите вероятность того, что первым будет вынут красный шар, а затем белый.
3. Из полного набора домино вынули одну кость и отложили в сторону. Из оставшихся костей наудачу взяли две. Найдите вероятность того, что обе кости являются дублями.
4. Какова вероятность того, что среди 1000 наугад выбранных лиц семеро родились 8 марта?
5. Производится залп из трех орудий. Вероятность попадания для каждого из них одинакова и равна 0,8. Случайная величина X - число попаданий. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.
6. Производится испытание трех независимо работающих элементов, время безотказной работы которых распределено по показательному закону с параметрами 0,03, 0,04, 0,02 соответственно. Найдите вероятность того, что за 50 часов откажет хотя бы 2 элемента.
7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

В результате опроса больных во время эпидемии гриппа получены следующие данные об их возрасте в годах: 38, 41, 33, 45, 53, 68, 47, 49, 14, 54, 77, 28, 58, 42, 61, 61, 47, 41, 44, 30, 67, 39, 43, 54, 59, 60, 51, 42, 21, 60, 52, 46, 49, 57, 59, 47, 48, 32, 58, 30, 35, 72, 45, 55, 40, 65, 48, 60, 42, 50.

Вариант 13

1. В инструментальном ящике находится 15 стандартных и 5 бракованных деталей. Из ящика наугад вынимают две детали. Найти вероятность того, что эти детали стандартны.

2. Вероятность поражения мишени для некоторого стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0.5. Найдите вероятность поражения второй мишени.

3. Литье болванок поступает из I, II и III цехов в отношении 5:3:2. При этом материал первого цеха содержит 0.75 % брака, второго - 0.65 %, третьего - 0.1 %. Найдите вероятность того, что наудачу взятая болванка не имеет дефектов.

4. Прядильщица обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва нити в течение часа равна 0.005. Какова вероятность того, что в течение часа нитка оборвется не больше чем на 10 веретенах ?

5. В складском помещении находится 15 телевизоров, из которых 3 дефектны (а какие - неизвестно). Наудачу для проверки выбрали 5 телевизоров. Случайная величина X - количество дефектных телевизоров среди выбранных. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Совхоз приобрел два уборочных комбайна разных типов. Время их безотказной работы распределено по показательному закону с параметрами 0,002 и 0,005 соответственно. Какова вероятность того, что оба они в первые три года эксплуатации не выйдут из строя?

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

В результате опроса больных во время эпидемии гриппа получены следующие данные об их возрасте в годах: 48, 51, 43, 55, 63, 78, 57, 59, 24, 64, 87, 38, 68, 52, 71, 71, 57, 51, 54, 40, 77, 49, 53, 64, 69,70, 61, 52, 31, 70, 62, 56, 59, 67, 69, 57, 58, 42, 68, 40, 45, 82, 55, 65, 50, 75, 58, 70, 52, 60.

Вариант 14

1. Одновременно брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков: а) меньше пяти; б) равна 6

2. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из трех зон. Вероятность попадания в первую зону равна 0.2, во вторую - 0.15,. в третью - 0.1. найдите вероятность промаха по мишени.

3. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено с первого курса - 4 студента, со второго - 6, а с третьего - 5. Вероятности того, что студент попадает в сборную института равны 0.9, 0.7 и 0.8 соответственно для студентов I, II и III курсов. Студент, выбранный наудачу по спискам, в итоге соревнования попал в сборную. С какого курса вероятнее всего этот студент ?

4. Некачественные сверла составляют 2% всей продукции фабрики. Изготовленные сверла упаковываются в ящики по 100 штук. Какова вероятность того, что в ящике окажется не более 3 некачественных сверл.

5. Из коробки с 28 костяшками домино берется 5 костей. Случайная величина X - число дублей среди выбранных. Составьте

закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Вы купили холодильник и видеомагнитофон. Длительность времени безотказной работы для них распределена по показательному закону с параметрами 0,002 и 0,006 соответственно. Найдите вероятность того, что в течение первых же 50 часов работы откажет хотя бы один из них.

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

В результате опроса больных во время эпидемии гриппа получены следующие данные об их возрасте в годах: 38, 77, 67, 52, 35, 41, 28, 39, 46, 72, 33, 58, 43, 49, 45, 45, 42, 54, 57, 55, 53, 61, 59, 59, 40, 68, 61, 60, 47, 65, 47, 47, 51, 48, 48, 49, 41, 42, 32, 60, 14, 44, 21, 58, 42, 54, 30, 60, 30, 50.

Вариант 15

1. На карточках написаны числа от 1 до 100. Найти вероятность того, что на случайно выбранной карточке содержится цифра 3.

2. Определите вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется высшего качества, если известно, что 4% всей продукции является браком, а 3/4 всех небракованных изделий является продукцией высшего качества.

3. Из ящика с 6 белыми и 3 черными шарами наудачу взяты два шара и переложены в ящик с 5 белыми и 7 черными шарами. А затем из второго ящика вынут один шар. Найдите вероятность, что этот шар белый.

4. Некачественные сверла составляют 2% всей продукции фабрики. Изготовленные сверла упаковываются в ящики по 100 штук. Какова вероятность того, что в ящике не окажется некачественных сверл .

5. Производится два залпа из двух орудий. Вероятность попадания в мишень для первого - 0,9, для второго - 0,7. Случайная величина X - сумма всех возможных попаданий. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Проектный размер детали, штампуемой автоматом, 20см. Контролируемый размер - случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 1см. Какой процент деталей будет иметь размер от 17 до 25 см?

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

В результате опроса больных во время эпидемии гриппа получены следующие данные об их возрасте в годах: 43, 82, 72, 57, 40, 46, 43, 44, 51, 77, 38, 63, 48, 54, 50, 50, 47, 59, 62, 60, 58, 66, 64, 64, 45, 73, 66, 65, 52, 70, 52, 52, 56, 53, 53, 54, 46, 47, 37, 65, 19, 49, 26, 63, 47, 59, 35, 65, 35, 55.

Вариант 16

1. Среди 35 деталей, подвергаемых проверке, 31 точная. Какова вероятность того, что из 25 наудачу взятых деталей окажется 8 точных ?

2. В приборе имеется три независимо установленных сигнализатора об аварии. Вероятность того, что в случае аварии

сработает первый равна 0.9, второй - 0.7, третий - 0.8. Найдите вероятность того, что при аварии не сработает ни один сигнализатор.

3. 4 студентов группы учатся отлично, 5 не имеют троек и 8 имеют различные оценки. Вероятность отличнику получить "5" на экзамене по математике равна 0.9, для хорошистов эта вероятность равна 0.5, а для остальных 0.15. Найти вероятность того, что первый сдавший студент получил отлично.

4. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно равна 0.0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

5. Вероятность получить положительную оценку на повторном экзамене по теории вероятностей для студентов первой группы равна 0,4, а для студентов второй группы – 0,7. На переэкзаменовку пришли 3 студента из первой группы и 2 из второй. Случайная величина X – сумма полученных положительных оценок. Составьте закон распределения случайной величины, постройте многоугольник распределения, найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий центральный момент случайной величины.

6. Время безотказной работы двигателя «Жигулей» случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром 0,01. Найдите вероятность того, что при непрерывной эксплуатации двигателя он откажет в период времени от 2 до 5 лет.

7. Для заданных массивов чисел провести статистическую обработку:

✓ Построить интервальный статистический ряд из 7 интервалов.

✓ Построить полигон, гистограмму, эмпирическую функцию плотности распределения.

✓ Используя метод условных вариант, найти точечные статистические оценки: выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

✓ Найти и построить эмпирическую функцию распределения.

Изучен пробег 50 автомобилей таксопарка. Получены следующие данные (в тыс. км.): 23, 62, 52, 37, 20, 26, 23, 24, 31, 57, 18, 43, 28, 34, 30, 30, 27, 39, 42, 40, 38, 46, 44, 44, 25, 53, 46, 45, 32, 50, 32, 32, 36, 33, 33, 34, 26, 27, 17, 45, 19, 29, 16, 43, 27, 39, 15, 45, 15, 35.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ:

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.- М.: Высшая школа 1979 г.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.: Высшая школа 1977 г.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 6-Е изд. - М : Наука, 1988 г.
4. Матбюро: учебники по теории вероятностей. Режим доступа [http://www.matburo.ru/st_subject.php?p=tv 14.04.20].