Министерство науки и высшего образования

Российской Федерации

Братский педагогический колледж

федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования

«Братский государственный университет»

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по теме «Элементы аналитической геометрии»

для студентов I курса
очной и заочной форм обучения
специальности
09.02.07 Информационные системы и программирование
44.02.01 Дошкольное образование
40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Автор: А.В. Долгих

Братск, 2021

Математика. Методические рекомендации по теме «Элементы аналитической геометрии» / Сост. А.В. Долгих – Братск.: БПК ФГБОУ ВО «БрГУ», 2021 г. – 25 с.

В методических рекомендациях предлагаются задания для практических работы по вариантам. Предназначено для студентов специальностей, изучающих математику, в качестве справочного и практического материала и может быть использовано для работы в аудитории под руководством преподавателя, так и при самостоятельной подготовки.

Печатается по решению научно-методического совета Братского педагогического колледжа ФГБОУ ВО «БрГУ»
665709, г. Братск, ул. Макаренко 40

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Целью курса является формирование у студентов математического аппарата необходимого для решения теоретических и практических задач и умения самостоятельно изучать литературу по математическому анализу.

Задачи дисциплины:

1. Получение теоретических знаний по ряду разделов математики.
2. Практическое освоение приемов и методов решения математических задач, имеющих применение при рассмотрении вопросов в других дисциплинах учебного плана.

Курс ориентирован на приобретение теоретических знаний и практических навыков в решении задач по математике.

При изучении курса предусмотрена самостоятельная работа, которая включает: изучение основной и дополнительной литературы, учебных пособий, конспектов лекций и практических занятий, а также выполнение домашних заданий с решением примеров и задач по каждому разделу изучаемого курса.

Основные понятия аналитической геометрии: координаты точек, координатная форма представления линий и поверхностей с помощью алгебраических уравнений, формы записи уравнений прямых линий и линий второго порядка на плоскости, а также уравнений прямой и плоскости в пространстве.

Элементы аналитической геометрии

Аналитическая геометрия - это раздел математики, который изучает геометрические фигуры не геометрическим построением, а аналитическим методом с помощью алгебраических уравнений.

В основе аналитической геометрии лежит метод координат. Метод координат заключается в том, что любую линию на плоскости или в пространстве можно задать алгебраическим уравнением, которое называется уравнением линии. Уравнение линии связывает между собой текущие координаты произвольной точки , лежащей на линии.

Например, уравнение y=2x-1 задает на плоскости прямую линию. В этом уравнении x и y – текущие координаты произвольной точки M(x;y), лежащей на данной прямой. Все точки прямой имеют координаты, которые обращают данное уравнение в верное числовое тождество.

Проверим, лежат ли точки $\mathbf{M_1(1;1)}$ и $\mathbf{M_2(2;2)}$ на прямой, заданной уравнением y=2x-1. Подставим координаты точек в это уравнение:

1) $\mathbf{M_1(1;1)}$**:** $\mathbf{1 = 2 \times 1 - 1 \Rightarrow 1 \equiv 1}$ - точка лежит на прямой;

2) **M2(2;2): 2=**$\mathbf{2 \times 2 - 1 \Rightarrow \; 2 \neq 3}$ - точка не лежит на прямой.

Данная задача решена нами не геометрическим построением, а аналитически с помощью уравнения.

Уравнение первой степени y=2x-1 задает на плоскости линию первого порядка, а уравнение второй степени y=x2 задает на плоскости линию второго порядка. Порядок линии определяется старшей степенью координат точек линии.

Ниже рассмотрим линии первого и второго порядка на плоскости.

Прямая линия на плоскости

Общее уравнение прямой и уравнение прямой с угловым коэффициентом

Определение: Прямая - это линия первого порядка, которая задается уравнением первой степени вида: Ax + By + C = 0

Это уравнение вида называется общим уравнением прямой линии. В этом уравнении А, В, С – числовые коэффициенты, x, y – текущие координаты произвольной точки, лежащей на прямой линии.

Покажем, что уравнение первой степени вида: Ах + Ву + С = 0 задает прямую линию на плоскости. Преобразуем это уравнение: Ву = - Ах - С в $\mathbf{y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}}$,

введем обозначения: $\mathbf{k = -\frac{A}{B}}$ и $\mathbf{b = -\frac{C}{B}}$

Получим уравнение $\mathbf{y = кx + b}$, график которого представляет собой прямую линию.

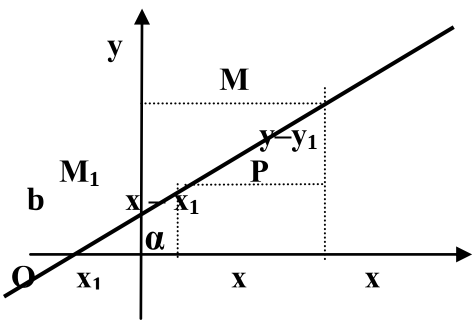
Уравнение вида: $\mathbf{y = кx + b}$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом;

где $\mathbf{к = tg\alpha}$ - угловой коэффициент,

α - угол наклона, $\mathbf{b}$

- отрезок, отсекаемый прямой на оси Оу.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом



Пусть прямая L проходит через заданную точку M1(x1;y1) с наклоном, заданным угловым коэффициентом $\mathbf{к = tg\alpha}$. Возьмем на прямой произвольную точку с текущими координатами М(x;y). Опустим перпендикуляры на координатные оси и рассмотрим Δ M1MP. Выразим

$$\mathbf{tg\alpha = \frac{MP}{M_1P} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = к}.$$

Умножим обе части уравнения на (x-x1) и получим уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом:

$$\mathbf{y - y_1 = к(x - x_1)}.$$

Пример. Составить уравнение прямой L, проходящей через М(1;2) под углом $\alpha = 45^0$.

Решение:

1) Найдем угловой коэффициент $к = tg\,\alpha = tg\,45 = 1$;

2) Составим уравнение прямой L, проходящей через заданную точку М(1; 2) с угловым коэффициентом к = 1. Подставим координаты в уравнение $\mathbf{y - y_1 = к(x - x_1)}$ и получим:

y – 2=x – 1 $\Rightarrow$ y=x+1 – искомое уравнение прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть прямая L проходит через две заданные точки M1(x1;y1), M(x2;y2). Запишем уравнение прямой L, проходящей через точку M1: y - y1 = к(x - x1). Так как точка M2 лежит на L, то ее координаты удовлетворяют этому уравнение, т.е.

y2 - y1=к(x2 - x1).

Откуда выразим угловой коэффициент $\mathbf{к = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ - это формула расчета углового коэффициента прямой, проходящей через две заданные точки. Подставим в первое уравнение:

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}.$$

Если разделить на y2 - y1 , то получим:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$ - это уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Пример. Даны две точки А(-1;2) и В(1;5). Записать уравнение прямой АВ и найти ее угловой коэффициент.

Решение:

Запишем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки А и В:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_B}.$$

Подставим координаты точек А(хА = -1, уА = 2) и В(хВ = 1, уВ = 5) в это уравнение:

$$\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \Rightarrow \frac{y-2}{3} = \frac{x+1}{2} \Rightarrow$$ 2(у - 2) = 3(х + 1) $\Rightarrow$ 2у - 4 = 3х + 3 $\Rightarrow$ 3х + 2у - 7 = 0.

Получили общее уравнение прямой АВ. Преобразуем полученное уравнение в уравнение прямой с угловым коэффициентом вида: у=кх+в. Выразим у через х:

2у=3х+7 /:2 $\Rightarrow$ у = $\frac{3}{2}$ (х +7) $\Rightarrow$ $$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

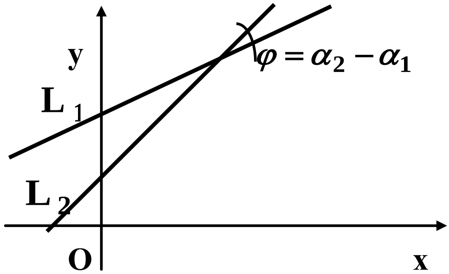
- это уравнение прямой АВ с угловым коэффициентом,

где $\text{к} = \text{tg}\alpha = \frac{3}{2}$ - угловой коэффициент АВ.

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки А и В можно также рассчитать по формуле:

$$\text{к} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{1-(-1)} = \frac{3}{2}.$$

3.1.4 Угол между двумя прямыми



Пусть прямые L1 и L2 заданы уравнениями:

$$\mathbf{y = к_1 x + b_1}$$

$\mathbf{y = к_2 x + b_2}$, где $\mathbf{к_1 = tg\alpha_1, \quad к_2 = tg\alpha_2}$ - угловые коэффициенты.

Найдем угол между двумя прямыми: $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Из тригонометрии известно, что:

$$\mathbf{tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \times tg\alpha_2} = \frac{к_2 - к_1}{1 + к_1 \times к_2}}.$$

Перепишем это выражение в виде: $\mathbf{tg\varphi = \left| \frac{к_2 - к_1}{1 + к_1 \times к_2} \right|}$.

Получили формулу для нахождения угла φ между двумя прямыми. В этой формуле $tg\varphi$ вычисляется по модулю (положительное значение), т.к. угол между прямыми берется острый.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

1. Если прямые L1 и L2 параллельны друг другу, то $\varphi = 0$, откуда следует: к2-к1=0 или $\boxed{к1 = к2}$- это условие параллельности прямых. Для параллельных прямых угловые коэффициенты совпадают.

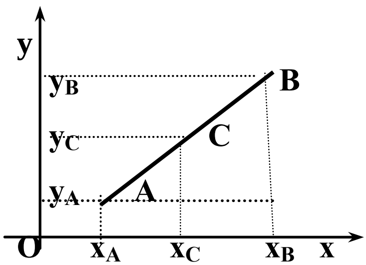
2. Если прямые L1 и L2 перпендикулярны, то $\boldsymbol{\varphi = 90^0}$, а $\mathbf{tg}\boldsymbol{\varphi = \infty}$. Это возможно, когда знаменатель 1+к1 $\times$ к2 = 0

$$\Rightarrow \quad \mathbf{к_1 \times к_2 = -1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{к_2 = -\frac{1}{к_1}}$$

- это условие перпендикулярности прямых.

Определение длины отрезка прямой и координат его середины

Пусть дан отрезок прямой , проходящей через точки A(xA;yA) и B(xB;yB).



Длина отрезка AB определяется по теореме Пифагора:

AB= $\sqrt{(\mathbf{y_B - y_A})^2 + (\mathbf{x_B - x_A})^2}$.

Координаты середины отрезка находятся по формулам:

$$\mathbf{x_C = \frac{x_B + x_A}{2}, \quad y_C = \frac{y_B + y_A}{2}}.$$

Пример.

Записать уравнения 1) стороны AC, 2) высоты CD и 3) медианы BE в треугольнике с вершинами A(-8;3), B(-6;0), C(6;-5). 4) Найти координаты точки M(xм;yм) – пересечения высоты CD и медианы BE.

Решение:

1) Составим уравнение стороны AC, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{y-y_A}{y_C-y_A}=\frac{x-x_A}{x_C-x_A} \Rightarrow \frac{y-3}{-5-3}=\frac{x-(-8)}{6-(-8)} \Rightarrow$$

$$\frac{y-3}{-8}=\frac{x+8}{14} \Rightarrow 14*(y - 3)=(-8)*(x + 8) \Rightarrow$$

8x + 14y + 22=0 – общее уравнение стороны AC;

2) Высота CD $\perp$ AB $\Rightarrow$ $\kappa_{CD}=-\dfrac{1}{\kappa_{AB}}$. Найдем

$$\kappa_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_D-x_A}=\frac{0-3}{-6-(-8)}=-\frac{3}{2}$$ и

$$\kappa_{CD}=-\frac{1}{\kappa_{AB}}=-1:\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}$$

Составим уравнение высоты CD, используя уравнение прямой, проходящей через заданную точку C(6;-5) с заданным угловым коэффициентом

$$\kappa_{CD}=\frac{2}{3}:$$

$$y-y_C=\kappa_{CD}(x-x_C), \quad y-(-5)=\frac{2}{3}(x-6), \quad y=\frac{2}{3}x-9$$ -

искомое уравнение высоты CD с угловым коэффициентом. Запишем его в общем виде, умножив обе части уравнения на 3: $\boxed{2x-3y-27=0}$- общее уравнение высоты CD;

3) Медиана BE проходит через середину стороны AC. Найдем координаты E(xE;yE)-середины отрезка AC по формулам:

4)

5) $$x_E=\frac{x_C+x_A}{2}=\frac{6+(-8)}{2}=-1, \quad y_E=\frac{y_C+y_A}{2}=\frac{-5+3}{2}=-1$$

. E (-1;-1) - середина стороны AC.

Составим уравнение медианы BE, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{y-y_B}{y_E-y_B}=\frac{x-x_B}{x_E-x_B} \Rightarrow \frac{y-0}{-1-0}=\frac{x-(-6)}{-1-(-6)} \Rightarrow \frac{y}{-1}=\frac{x+6}{5}$$

$\Rightarrow$ 5y =-x-6 $\Rightarrow$

$\boxed{x + 5y + 6=0}$ – общее уравнение медианы BE;

6) Найдем координаты точки M(xм;yм) – пересечения высоты CD и медианы BE, решив систему их уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x-3y=27 \\ x+5y=-6 \end{cases}$$

- Вычислим определители системы и неизвестных Δ, Δx, и Δy.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=2*5-1*(-3)=13; \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 27 & -3 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}=27*5-(-6)*($$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 27 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=2*(-6)-27*1=-39.$$

- Найдем решение системы по формулам Крамера:

xM $=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{117}{13}=9$; yM = $\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-39}{13}=-3.$

Проверка: $\begin{cases} 2*9-3*(-3)=27 \\ 9+5*(-3)=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 27=27 \\ -6=-6 \end{cases}$ (верно).

M (9;-3) -точка пересечения высоты CD и медианы BE.

Линии второго порядка

Определение: Линиями второго порядка называются линии, которые задаются уравнениями второй степени вида: $Ax2+By2+Cx+Dy+E=0$,

где x,y – текущие координаты точек, лежащих на линии; A,B,C,D,E – числовые коэффициенты.

Данное уравнение называется общим уравнением линий второго порядка.

Общее уравнение линий второго порядка можно привести к каноническому (простейшему) виду. Для этого в общем уравнении необходимо сгруппировать и дополнить члены, содержащие координаты x и y, до полных квадратов и получить уравнение вида:

$$A(x-x0)2+B(y-y0)2=\Delta.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением линий второго порядка со смещенным центром, в котором $x0$ и $y0$ – координаты смещенного центра. Смещенный центр- это точка $C(x0;y0)$, которая является центром симметрии, а прямые $x=x0$ и $y=y0$ являются осями симметрии.

Если центр симметрии находится в начале координат, т.е. $x0=0$, $y0=0$, то уравнение имеет вид: $Ax2+By2=\Delta$.

Данное уравнение называется каноническим уравнением линий второго порядка с несмещенным центром. Для линий второго порядка с несмещенным центром осями симметрии служат координатные оси.

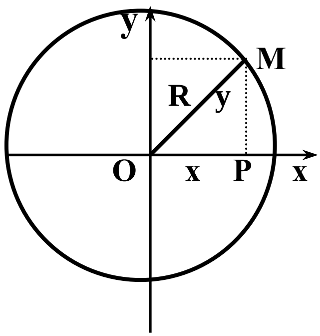
Определение: Линии, имеющие центр и оси симметрии, называются центральными.

К центральным линиям второго порядка относятся: окружность, эллипс, гипербола и парабола, которые рассмотрим ниже.

Окружность

Определение: Окружность – это линия второго порядка, которая представляет собой геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной заданной точки, называемой центром.

Если центр находится в начале координат, то окружность задается каноническим уравнением второй степени вида: $x2+y2=R2$, где R – радиус окружности; x,y – текущие координаты точек, лежащих на окружности.



Для вывода данного уравнения возьмем на окружности произвольную точку M(x;y). Отрезок OM=R является гипотенузой в прямоугольном треугольнике OMP, а катеты определяются координатами x и y точки M. Уравнение окружности получается по теореме Пифагора: $x2+y2=R2$, которое называется каноническим уравнением окружности с несмещенным центром.

Если центр окружности находится в точке C(x0;y0), то уравнение окружности со смещенным центром будет иметь вид: $(x-x0)2+(y-y0)2=R2$.

Построение окружности выполняется с помощью циркуля.

Эллипс

Определение: Эллипс – это линия второго порядка, которая представляет собой геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и равная большой оси эллипса.

Эллипс с несмещенным центром задается каноническим уравнением второй степени вида:

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1},$$

где а и в - полуоси, х,у – текущие координаты точек, лежащих на эллипсе. Центр симметрии находится в начале координат. Осями симметрии служат координатные оси.

При рассмотрении эллипса возможны два случая:

1. Если а>в, то а называется большая полуось, лежащая на координатной оси Ох, а в – малая полуось, лежащая на координатной оси Оу;

2. Если а<в, то а называется малая полуось, лежащая на координатной оси Ох, а в–большая полуось, лежащая на координатной оси Оу.

Фокусы F1 и F2 всегда лежат на большой оси эллипса, причем симметрично относительно центра симметрии на расстоянии:

$$\mathbf{\pm c=\pm\sqrt{a^2-в^2},\quad \text{на оси Ох при } a\rangle в}$$

$$\mathbf{\pm c=\pm\sqrt{в^2-a^2},\quad \text{на оси Оу при } в\rangle a},$$

где величина "с" определяет фокусное расстояние.

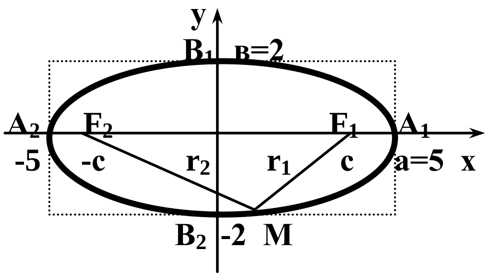
Для характеристики формы эллипса вводится эксцентриситет.

Определение: Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния к длине его большой полуоси:

$\varepsilon=$ $\mathbf{\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-в^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{в}{a}\right)^2}}$, если а>в и $\varepsilon=$

$\mathbf{\frac{c}{в}=\frac{\sqrt{в^2-a^2}}{в}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{в}\right)^2}}$, если в>а.

Значение эксцентриситета меняется в пределах $0 \le \varepsilon \le 1$. При этом форма эллипса изменяется от окружности ($\varepsilon=0$, при а=в=R) и, вытягиваясь, вырождается в прямую ($\varepsilon=1$, при а>>в).



Уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$$

выводится из его основного свойства, представленного в определении. Возьмём на эллипсе произвольную точку M(x;y). Расстояния r1 и r2 от фокусов F1 и F2 до точки M(x;y) называются фокальными радиусами.

В соответствии с определением сумма фокальных радиусов есть величина постоянная, равная большой оси эллипса: r1 + r2 = 2a (при а>в) - основное свойство эллипса. Для вывода уравнения эллипса необходимо выразить фокальные радиусы r1 и r2 через координаты точки M(x;y) и фокусов F1(c;0) и F2(-c;0)и подставить в это равенство.

Если центр симметрии смещен и находится в точке C(x0;y0), то уравнение эллипса со смещенным центром имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{в^2}=1.$$

Построение эллипса рассмотрим ниже на примерах.

Пример. Определить вид, параметры и построить линию, заданную уравнением:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Решение: 1. Это эллипс с несмещенным центром вида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{в^2}=1$$
.

2.Найдем параметры: $a^2=25;\quad a=\sqrt{25}=5$ - большая полуось на оси Ох;

$в^2=4;\quad в=\sqrt{4}=2$ - малая полуось на оси Оу;

$c=\sqrt{a^2-в^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}=4.6$ - фокусное расстояние

ε= $\frac{c}{a}=\frac{4.6}{5}=0.9$ 1- эксцентриситет.

Фокусы F1(4.6;0) и F2(-4.6;0) лежат на большой оси, совпадающей с осью Ох, симметрично, на расстоянии ±с=±4.6 относительно начала координат.

3. Построение эллипса (см. рисунок выше) выполним по этапам:

1)строим систему координат Оху;

2)на координатных осях симметрично относительно начала координат откладываем большую и малую полуоси (±а=±5, ±в=±2) и показываем вершины эллипса А1,А2,В1,В2;

3)через вершины эллипса параллельно координатным осям строим осевой прямоугольник;

4)вписываем эллипс в осевой прямоугольник;

5)на большой оси, совпадающей с осью Ох, симметрично относительно начала координат показываем фокусы F1(4.6;0) и F2(-4.6;0).

Гипербола

Определение: Гипербола – это линия второго порядка, которая представляет собой геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и равная действительной оси гиперболы.

Основное свойство гиперболы, представленное в определении, можно выразить в виде равенства: | r1 - r2 |=2a, где а –

действительная полуось гиперболы, r1 и r2 - фокальные радиусы произвольной точки M(x;y) гиперболы.

Гипербола задается каноническими уравнениями второй степени вида:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = \pm 1,$$

где а и в - полуоси, х,у – текущие координаты точек, лежащих на эллипсе.

Это канонические уравнения гиперболы с несмещенным центром. Центр симметрии находится в начале координат. Осями симметрии служат координатные оси.

Гиперболы бывают двух видов – обычная и сопряженная.

1. Обычная гипербола задается уравнением вида:
2.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1,$$

где а называется действительная полуось, лежащая на оси Ох; в-мнимая полуось, лежащая на оси Оу.

2. Сопряженная гипербола задается уравнением вида:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = -1 \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{в^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

где а называется мнимая полуось, лежащая на оси Ох, в-действительная полуось, лежащая на оси Оу.

Фокусы F1 и F2 всегда лежат на действительной оси гиперболы, причем симметрично относительно центра симметрии на расстоянии: $\pm c = \pm\sqrt{a^2 + в^2}$, где величина "с" определяет фокусное расстояние.

Для характеристики формы гиперболы вводится эксцентриситет.

Определение: Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния "с" к длине его действительной полуоси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + в^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{в}{a}\right)^2}$$, если а –действительная полуось

$$\varepsilon = \frac{c}{в} = \frac{\sqrt{a^2 + в^2}}{в} = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{в}\right)^2}$$, если в–действительная полуось.

Значение эксцентриситета меняется в пределах $1 \le \varepsilon < \infty$.

Гипербола состоит из двух ветвей, которые расположены симметрично относительно оси симметрии и проходят через действительные вершины гиперболы, неограниченно приближаясь на бесконечности к двум прямым, называемым асимптотами.

Для построения асимптот строится осевой прямоугольник со сторонами $x = \pm a$ и $y = \pm в$, проходящими через вершины гиперболы параллельно координатным осям. Асимптоты строятся по диагоналям осевого прямоугольника и задаются уравнениями вида:

$$y = \pm \frac{в}{a} x.$$

Если центр симметрии смещен и находится в точке С(x0;y0), то уравнение гиперболы со смещенным центром имеют вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{в^2} = \pm 1 .$$

Построение гиперболы рассмотрим на примере.

Пример. Определить вид, параметры и построить линию заданную уравнением:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

Решение:1. Это гипербола с несмещенным центром вида:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{в^2}=1$$
.

2. Найдем параметры: $a^2=9; \quad a=\sqrt{9}=3$ - действительная полуось на оси Ох;

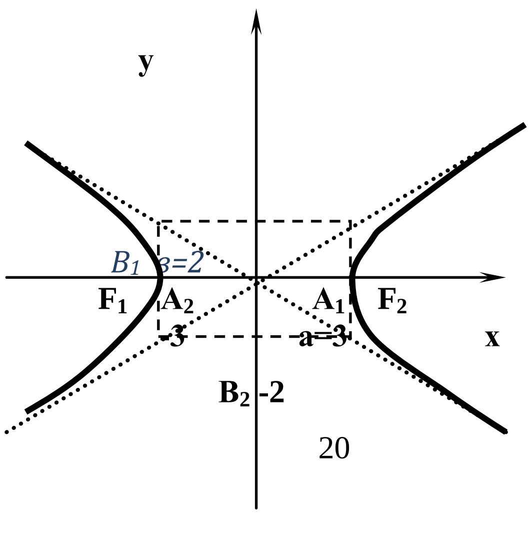
$в^2=4; \quad в=\sqrt{4}=2$ - мнимая полуось на оси Оу;

$c=\sqrt{a^2+в^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}=3.6$ - фокусное расстояние;

ε= $\frac{c}{a}=\frac{3.6}{3}=1.2$ - эксцентриситет.

Фокусы F1(3.6;0) и F2(-3.6;0) лежат на действительной оси, лежащей на оси Ох, симметрично, на расстоянии ±с=±3.6 относительно начала координат.

Порядок построения гиперболы:



1)строим систему координат Оху;
2)на

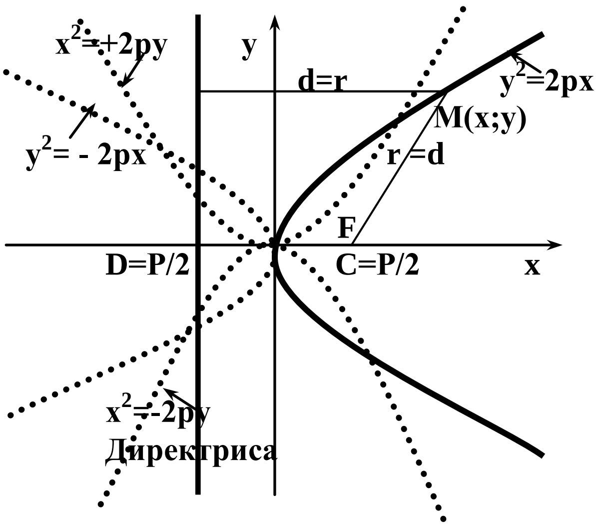
координатных осях симметрично относительно начала координат откладываем действительную и мнимую полуоси (±а=±3; ±в=±2) и показываем действительные (А1,А2) и мнимые (В1,В2) вершины гиперболы;

3)через вершины гиперболы параллельно координатным осям строим осевой прямоугольник;

4)по диагоналям осевого прямоугольника строим асимптоты;

5)от действительных вершин (А1,А2) к асимптотам строим правую и левую ветви гиперболы;

6)на действительной оси, лежащей на оси Ох, симметрично относительно начала координат показываем фокусы F1(3.6;0) и F2(-3.6;0).



Парабола

Определение: Парабола – это линия второго порядка, которая представляет собой геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой фокусом и от заданной прямой, называемой директрисой.

Парабола с несмещенным центром (вершиной) задается каноническими уравнениями вида:

$$y^2 = \pm 2px \quad \text{и} \quad x^2 = \pm 2py,$$

где p - параметр параболы, который определяет расстояние от фокуса до директрисы.

Фокус (F) и директриса (прямая D) располагаются симметрично относительно начала координат на расстоянии C=D= $\frac{p}{2}$, где C-фокусное расстояние; D-расстояние до директрисы от начала координат. Фокус F всегда лежит на оси симметрии внутри параболы, а директриса D проходит перпендикулярно оси симметрии вне параболы.

Расстояние от фокуса до директрисы определяется параметром параболы и составляет:

p = C+ D.

Для параболы вида: $y^2 = \pm 2px$ осью симметрии служит координатная ось Ox, а для параболы вида: $x^2 = \pm 2py$ осью симметрии служит координатная ось Oy. Центр симметрии, который называется вершиной параболы, находится в начале координат.

Уравнения параболы выводятся из её основного свойства, представленного в определении. Возьмём на параболе произвольную точку M(x;y). Расстояния от фокуса и директрисы до этой точки обозначим: r – фокальный радиус и d - расстояние до директрисы. В соответствии с определением точки параболы равноудалены от фокуса и директрисы, т.е. r = d – основное свойство параболы.

Для вывода уравнения параболы, например: y2=2px, необходимо выразить r и d через координаты точки M(x;y), фокуса и директрисы:

r = $\sqrt{y^2 + (x - \frac{p}{2})^2}$ и d = $x + \frac{p}{2}$.

Приравняв эти величины:

$$\sqrt{y^2+(x-\frac{p}{2})^2}=x+\frac{p}{2},$$

возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$y^2+x^2-px+\frac{p^2}{4}=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Сократим равные члены уравнения его левой и правой частей x^2, $\frac{p^2}{4}$ и, перенеся с левой части в правую величину px, получим уравнение параболы: y2=2px. Аналогично выводятся другие уравнения параболы.

Если центр симметрии (вершина) смещен и находится в точке C(x0;y0), то уравнения параболы со смещенным центром имеют вид:

$$(y-y_0)^2=\pm2p(x-x_0)\quad и \quad (x-x_0)^2=\pm2p(y-y_0)$$

.

Построение параболы рассмотрим на примере.

Пример. Определить вид, параметры и построить линию: (y-3)2= - 8(x+1).

Решение:

1. Это парабола со смещенным центром (вершиной) вида: (y-y0)2= -2p(x-x0).

1. Найдем параметры: -2p=-8 ⇒ p=4 – параметр параболы, определяющий расстояние от фокуса до директрисы (p=c+D); c=D= $\frac{p}{2}$ =2 – расстояния от вершины до фокуса и директрисы.

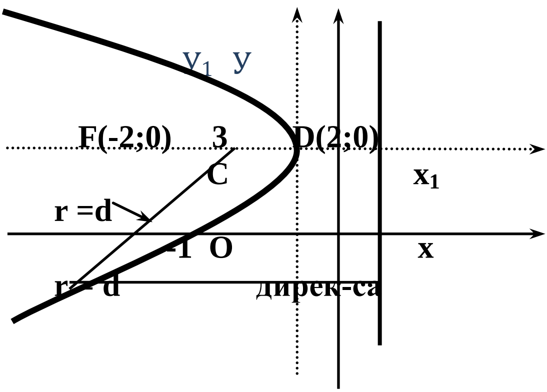
Найдём смещенный центр – вершину параболы: y-y0 = y-3 ⇒ y0=3; x-x0 = x+1 ⇒ x0= -1 Тогда C(-1;3) - вершина параболы.

2. Для построения параболы перейдем во вспомогательную систему координат Cx1y1, приняв за новые координаты: x1=x+1; y1=y-3. Тогда во вспомогательной системе координат получим уравнение параболы с несмещенным центром (вершиной): y12= - 8x1.

Так как квадрат числа всегда положительный y12= - 8x1>0, то x1<0 и ветвь параболы будет слева от оси Cy1. Осью симметрии служит ось Cx1. Фокус лежит на оси симметрии внутри параболы и имеет координаты: F(-2;0). Директриса (прямая) проходит через точку D(2;0) перпендикулярно оси симметрии. Фокус F(-2;0) и точка D(2;0) симметричны относительно вершины C.

Построение параболы выполним во вспомогательной системе координат по расчетным точкам, вычислив таблицу:

x1	**0**	**-2**	**-8**
y1	**0**	**±4**	**±8**



x1= 0 ⇒ y12=-8*0=0; x1= -2 ⇒ y12=-8*(-2)=16, y1= $\pm\sqrt{16} = \pm 4$ **;**

x1=-8 ⇒ y12=-8*(-8)=64, y1= $\pm\sqrt{64} = \pm 8$ **.**

Порядок построения параболы:

1)строим основную Oxy и вспомогательную системы координат Cx1y1;

2)во вспомогательной системе координат Cx1y1 из таблицы по координатам наносим расчетные точки;

3)строим параболу по расчетным точкам;

4)на оси Cx1 показываем симметрично относительно вершины параболы фокус F(-2;0) и точку D(2;0), через которую перпендикулярно оси Cx1 строим директрису.