Министерство науки и высшего образования

Российской Федерации

Братский педагогический колледж

федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования

«Братский государственный университет»

Математика

Практические рекомендации
«Решение логарифмических уравнений»

для студентов
очной формы обучения

Автор: В.А. Савкина

Братск, 2021

Практические рекомендации по дисциплине «Математика» «Решение логарифмических уравнений» для студентов специальности очной формы обучения для студентов очной формы обучения / Сост. В.А. Савкина - Братск.: БПК ФГБОУ ВО «БрГУ», 2021 г. – 25 с.

Сборник содержит алгоритм решения логарифмических уравнений разного уровня, что способствует развитию навыков математического мышления обучающихся.

Печатается по решению научно-методического совета
Братского педагогического колледжа ФГБОУ ВО «БрГУ»
665709, г. Братск, ул. Макаренко 40

Содержание

Глава 1. Теоретические основы.

1.1 Основные понятия. Логарифмы и их свойства

Рассмотрим уравнение $a^x = b$, при $a > 0$ и $a \neq 1$. При $b \leq 0$ это уравнение не имеет решений и при $b > 0$ имеет единственное решение. Данное решение называют логарифмом 墉 по основанию a и обозначают $log_a\ b$. Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую необходимо возвести число a, чтобы получилось число b:

$log_a\ b$ = x. Это равенство называют основным логарифмическим тождеством

Свойства логарифмов

При $a > 0$ и $a \neq 1.$, $x > 0$, $y > 0$ и действительном p имеют место равенства:

1. $log_a 1 = 0$;
2. $log_a a = 1$;
3. $log_a xy = log_a x + log_a y$;
4. $log_a x/y = log_a x - log_a y$;
5. $log_a x^p = p\ log_a x$

Формула перехода к новому основанию:

$log_a x = log_b x / log_b a$

Логарифм, основанием которого является число 10, называют десятичным логарифмом и обозначают

$\boldsymbol{lga} = \boldsymbol{log_{10}a}$.

Логарифм, основанием которого является число e, называют натуральным логарифмом и обозначают

$\boldsymbol{lna} = \boldsymbol{log_e\ a}$

1.2 Логарифмическая функция

Определение. Функцию вида $y = log_a\ x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ называют логарифмической функцией с основанием a. Основные свойства логарифмической функции:

а) Область определения логарифмической функции есть множество положительных вещественных чисел - R+.

б) Область значения логарифмической функции есть множество вещественных чисел.

Если основание логарифмической функции $a > 1$, то функция возрастает на всей области определения.

Если же для основания логарифмической функции имеет место неравенство $0 < a < 1$, то логарифмическая функция убывает на всей области определения.

График логарифмической функции всегда проходит через точку (1;0).

Возрастающая логарифмическая функция положительна при $x > 1$ и отрицательна при $0 < x < 1$

Убывающая логарифмическая функция отрицательна при $x > 1$ и положительна при $0 < x < 1$. График возрастающей логарифмической функции - ($a > 1$):

Глава 2. Применение методов на практике.
Решение логарифмических уравнений.

Рассмотрим применение приведенных методов при решении логарифмических уравнений.

1) Используя определение логарифма

Решить уравнения:

а) $\log_2 (x - 7) = 3$

б) $\lg (2x + 6) / (x - 1) = 1$

Решения: а) $\log_2 (x - 7) = 3$

$x - 7 = 2^3$

$x = 15$

Проверка: $\log_2 (15 - 7) = 3$, $3 = 3 \Rightarrow 15$ является решением.

Ответ: 15

б) $\lg (2x + 6) / (x - 1) = 1$

$2x+6/ x-1 = 10$

$2x + 6 = 10x - 10$

$8x = 16$

$x = 2$

Сделав проверку, убеждаемся в том, что $x = 2$ наше решение.

Ответ:2.

2) Потенцирование

Решить уравнения:

а) $\log_3 (x + 1) + \log_3 (x + 3) = \log_3 3$

б) $\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg (x - 1) = 0$

Решения: а) $\log_3 (x + 1) + \log_3 (x + 3) = \log_3 3$

ОДЗ: $\{ x + 1 > 0\ x + 3 > 0 \Rightarrow x \in (-1, +\infty)$

Используя свойство логарифмов, получаем:

$\log_3 (x+1)(x+3)= \log_3 3$

$(x+1)(x+3)=3$

$x^2+4x+3=3$

$x^2+4x=0$

$x_1 =0$

$x_2 =-4$

Учитывая ОДЗ, получаем решение x=0.

Ответ:0.

б) $\lg(x^2 + 2x - 7) - \lg (x - 1) = 0$

ОДЗ: $\{ x^2 + 2x - 7 > 0\ x - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-1 + 2\sqrt{2}, +\infty)$

$\lg(x^2 + 2x - 7) = \lg(x - 1)$
$x^2 + 2x - 7 = x - 1$
$x^2 + x - 6 = 0$
$x_1 = -3$,
$x_2 = 2$
С учетом ОДЗ получаем x=2.
Ответ:2.

Уравнения, в которых неизвестное находится под знаком логарифма, называются ***логарифмическими***.

Пусть $a>0$, $a\neq 1$, $u>0$, $v>0$. Если $\log_a u = \log_a v$, то $u=v$.

Доказательство: воспользовавшись основным логарифмическим тождеством и условием, получим: $u=a^{\log_a u}=a^{\log_a v}=v$.

При решении логарифмических уравнений обязательно учитывается область определения логарифма.

Если область определения найти сложно, можно проверить полученные корни подстановкой в уравнение.

Решение уравнений по определению логарифма

Пример 1. Решите уравнение $\log_2 x = 2$

Решение. По определению логарифма имеем .x =4

Число 4 входит в область определения, следовательно, является корнем данного уравнения.

Ответ: 4

Задание 1. Решите уравнение:

1) $\log_3 x = 3$
2) $\log_6 x = 3$
3) $\log_2 x = 0$
4) $\log_2(-x) = -5$
5) $\log_4 x = -2$
6) log5 x = - 3
7) log5 x = 1

Пример 2. Решите уравнение $\log_2(x - 1) = 2$

Решение. По определению логарифма имеем. X -1 =4 Отсюда x=3.

Число 3 входит в область определения, следовательно, является корнем данного уравнения.

Ответ: 3

Пример 3. Найдите корень уравнения $\log_3 (x - 1) = 4$

Решение. По определению логарифма получаем:

$x - 1 = 81 \Leftrightarrow x = 82$. Число 82 входит в область определения ($82 - 1 > 0$), следовательно, является корнем уравнения.

Ответ: 82

Пример 4. Найдите корень уравнения.$\lg(2x - 4) = 2$

Решение. По определению логарифма получаем: $2x-4 = 100$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $x = 52$. Число 52 входит в область определения

($2 \cdot 52 - 4 = 100 > 0$ 82 – 1>0), (104следовательно, является корнем уравнения.

Ответ: 52

Задание 2. Решите уравнение…

1) $\log_{1/4}(2x - 1) = 1$
2) $\log_{1/2}(2x - 4) = -2$
3) $\log_2(3 - x) = 3$
4) $\log_{1/2}(3x - 5) = -1$
5) $\log(4x - 3) = 2$
6) $\log(6x - 1) = 1$
7) $\log(2x + 6.5) = 1$

Пример 5. Решите уравнение.$\log(x^2 - 2x) = 1$

Решение. По определению логарифма имеем

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$D=16$, $x_1=3$, $x_2= - 1$.

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: 3; - 1

Пример 6. Решите уравнение $\log_2(x^2-14x) = 5$.

Решение. По определению логарифма:,.$x^2 - 14x - 32 = 0$ Отсюдах = -2 , х =16;. **Ответ**; -2.16

Задание 3. Решите уравнение…

1) $\log_2(x^2+4x+3) = 3$
2) $\log(x^2+ 2x - 3) = 3$
3) $\log(3 - x^2) = -1$
4) $\log(x - 1)^2 = 1$
5) $\log(x^2 - 8x) = 2$

Пример 7. Решите уравнение log16 = 2

Решение. По определению логарифма $x>0$, $x \neq 1$ и $x^2=16$. Отсюда, $x= - 4$ или $x=4$.

Поскольку $x>0$, то решением данного уравнения является корень $x=4$.

Ответ: 4

Задание 4. Решите уравнение…

1) $\log_x 4=2$

2) $\log_x \sqrt{2}=1,5$

3) $\log_x 81= - 4$

4) $\log_x 1=2$

5) $\log_x 1=6$

6) $\log_x 16=4$

Пример 8. Решите уравнение $\log_{x-1} 16 =2$

Решение. По определению логарифма $(x-1)^2 = 16$. Отсюда $x – 1=4$ или $x – 1= - 4$. $x=3$ или $x= - 3$.

Поскольку $x>1$, то решением данного уравнения является корень $x=3$.

Ответ: 3

Пример 9. Решите уравнение.$\log_{x-1} 36 = 2$

Решение. С учетом области определения: $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 36, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 6\ , \\ x>1, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\pm 6, \\ x>1, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-5, \end{array} \right. \\ x>1, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow .x = 7$$

Ответ: 7

Задание 5. Решите уравнение

1) $\log_{x+1} 4 =2$

2) $\log_{1-x} 2 =2$

3) logx-22 =2

4) log x+116 = 4
5) log2-x9 = 2
6) log x-14 = 2

Пример 10. Решите уравнение.log($3x^2$+2x -1) =2
Решение. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1, \\ 3x^2+2x-1=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\neq 0, \\ 3x^2+2x-1=x^2+2x+1 \end{cases}.$$

Найдем корни уравнения :$3x^2$ +2x -1 = x^2 +2x +1
$2x^2$ =2, x^2 =1 ; *x*= - 1 или *x*=1.

Так как *x*> - 1, *x*≠0, то *x*= - 1 не является решением исходного уравнения

Ответ: 1

Пример 11. Решите уравнение $\log_{20}\log_3\log_2 x$ =0

Решение. По определению логарифма ; $\log_3\log_2 x = 20^0$=1
$\log_2 x$ =3. x =8

Ответ: 8

Задание 6. Решите уравнения: 1) $\log_7\log_2\log_{13}$=0
2) $\log_2\log_2\log_2 x$ =1
3)$\log_6\log_5\log_4 x$=0
4)$\log_5\log_4\log_3 x$=0
5) lglog $_4$log $_3$x =0
6) lglglog $_3$x =0

Метод потенцирования или метод, основанный на равенстве логарифмов

Пример 11. Решите уравнение $\log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$

Решение. Это уравнение определено для тех значений *x*, при которых выполняются неравенства 2*x*+3>0 и *x*+1>0.

Для этих *x* данное уравнение равносильно уравнению 2*x*+3=*x*+1. Отсюда *x*= - 2. Число – 2 не удовлетворяет неравенству *x*+1>0, следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений

Пример 12. Найдите корень уравнения .$\log_5(x-4) = \log_5 6$

Решение. Последовательно получаем: $\log_5(x-4) = \log_5 6$ ⇔ x-4=6 ⇔ x=10. Число 10 входит в область определения (10 – 4=6>0), значит, является корнем уравнения.

Ответ: 10

Пример 13. Решите уравнение $\log_7(x^2+2x) = \log_7(x^2+6)$

Решение. $\log_7(x^2+2x) = \log_7(x^2+6) \Leftrightarrow x^2+2x = x^2+6 \Leftrightarrow$

$2x = 6 \Leftrightarrow$.$x=3$

Выполнив проверку, убеждаемся, что 3 является корнем уравнения.

Ответ: 3

Пример 14. Найдите корень уравнения

.$\log_2(x-7) - \log_2(11-x) = 0$

Решение. Перенесем $\log_2(11-x)$ в правую часть уравнения. Получим уравнение, равносильное данному: $\log_2(x-7) = \log_2(11-x)$

Отсюда $x-7 = 11-x \Leftrightarrow 2x=18 \Leftrightarrow x=9$.

Делаем проверку: $9-7=2>0$, $11-9=2>0$. Значит, число 9 является корнем уравнения.

Ответ: 9

Сведение к квадратному уравнению

Пример 15. Решите уравнение

$\log_2{}^2(x-1) - 5\log_2(x-1) - 6 = 6$

Решение. Обозначив $\log_2(x-1)$ через a, получим уравнение $a^2 - 5a - 6=0$, откуда $a= -1$ или $a=6$.

Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\log_2(x-1) = -1$ или $\log_2(x-1) = 6$

Решая первое уравнение, получаем $x - 1=2^{-1}$, откуда $x=1{,}5$. Решая второе уравнение, получаем $x - 1=2^6$, откуда $x=65$.

Ответ: 1,5; 65

Задание 7. Решите уравнение…

1) $\log_5{}^2x - \log_5 x = 2$
2) $\log_2 4\log^2{}_3 x - \log_3 x = 0$
3) $\log^2{}_5 x - 5\log_5 x + 6 = 0$
4) $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$
5) $\lg^2 x - 3\lg x - 4 = 0$

Решение уравнений с использованием свойств логарифмов

Пример 16. Решите уравнение $2\lg(x-1) = \lg(5x+1)$.

Решение. По свойствам логарифма данное уравнение равносильно уравнению $(x-1)^2=5x+1$.

$x^2 - 2x+1=5x+1$; $x^2 - 7x=0$; $x(x-7)=0$. Отсюда $x=0$ и $x=7$.

Число 0 не входит в область определения

Ответ: 7

Задание9. Решите уравнение…

1) $2\log_{0,2}x = \log_{0,2}(5x^2 - x)$

2) $\log_{0,5}(6-x) = 2\log_{0,5}x$

3) $\lg(4x-3) = 2\lg x$

4) $\lg(12x - x^2 - 19) = 2\lg(x-1)$

5) $2\lg(x-1) = \lg(1,5x + 1)$

6) $2\lg(x-2) = 3\lg x$

Пример 17. Решите уравнение.

$\log_5 2x + \log_5 x = \log_5 8$

Решение. По свойствам логарифма данное уравнение равносильно уравнению .$\log_5 2x^2 = \log_5 8$

$2x^2 = 8$; $x^2 = 4$; $x = -2$ или $x = 2$.

С учетом того что $x > 0$ получим ответ $x = 2$.

Ответ: 2

Пример 18 . Решите уравнение

$\log_3(x-1) = \log_3(2 - x) + 1$

Решение. $1 = \log_3 3$, тогда $\log_3(x-1) = \log_3(2 - x) + 1$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1) = \log_3(2 - x) + \log_3 3$

По свойствам логарифма получаем: $\Leftrightarrow \log_3(x-1) = \log_3(2 - x)3$ $\Leftrightarrow x - 1 = 6 - 3x \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow$.$x = 1,25$

Выполним проверку: $1,25 - 1 = 0,25 > 0$. $2 - 1,25 = 0,75 > 0$.

Значит, число 1,25 является корнем уравнения.

Ответ: 1,25

Задание8. Решите уравнение…1) $\log_2(6-x) + \log_2(8-x) - \log_2(3-x) = 4$

2) $\lg(8x) - \lg(4x) = 0$

3) $\log_4(2x+1) - \log_4(1 - 2x) = \log_4 x$

4) $\log_5(x + 8) - \log_5(x+1) = 3\log_5 2$

5) $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x+4) = 1$

6) $\lg(x2 - 2x+1) - \lg(x - 1) = 1$

7) $\lg(6x) - \lg(2x) = 0$

Метод приведения к одному основанию

Пример 19

Решите уравнение $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$

Решение. Перейдем к основанию 2:

$\log_2 x + 1/2\log_2 x + 1/3\log_2 x = 11$

$11/6\log_2 x = 11$

$\log_2 x = 6$

$x=2^6$; $x=64$.

Ответ: 64

Задание9. Решите уравнение…

1) $\log_4 x - \log_{16} x = 0{,}5$
2) $\log_2 x + \log_8 x = -4$
3) $\log_5 x - \log_{0,2} x = 1$
4) $\log_4(2-x) = \log_2 3$
5) $\log_2 x + \log_8 x = 8$
6) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{1/3} x = 2$
7) $\log_4 x - \log_{0,25} x = 1$

Задание 10. Решите уравнение…1) $5^{\log_4 x + 3\log_x 4} = 8$

2) $\log_2 x + 3\log_x 8 = 4$
3) $4\log_{25}(x-1) - \log_3 27 + 2\log_{x-1} 5 = 1$
4) log 4x + log x1/16 = 1
5) $\log_5 x - \log_x 5 = 1{,}5$
6) $\log_7 x - \log_x 7 = 2$

Метод логарифмирования

Обычно логарифмируют уравнение вида $f(x)^{g(x)}=h(x)$.

Пример 20. Решите уравнение

$x^{\lg x} = 100x$

Решение. Учитывая, что $x>0$, прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10: $\lg x^{\lg x} = \lg 100x$

$\Leftrightarrow \lg^2 x - \lg x - 2 = 0$

Решая уравнение относительно x, получим: $\Leftrightarrow$

$\lg x = -1$, $\lg x = 2$

$x = 10^{-1}$ $x = 10^2$

Ответ: 0,1; 100

Задание 11. Решите уравнение…

1) $x^{\log_5 x-} = 1/25$
2) xlgx = 0,1x2
3) $x^{2\lg x} - 10x = 0$
4) $x^{\lg x} = 100x^2$

Уравнения с дополнительными условиями

Пример 21. Найдите сумму корней уравнения произведение корней уравнения

$x^{2+\log_2 x} = 8$.

Решение. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$\log_2 x^{2+\log_2 x} = \log_2 8$; $(2+\log_2 x)\log_2 x = 3$;

$2\log_2 x + \log^2{}_2 x - 3 = 0$; D=16; $\log_2 x = -3$; $x=\frac{1}{8}$; $\log_2 x = 1$; x=2.

Сумма корней данного уравнения равна $2+\frac{1}{8}=2\frac{1}{8}$.

Ответ: $2\frac{1}{8}$

1) сумму корней уравнения

$\log_{x+19}(2x^2+36x+1) = \log_4 8 + \cos^2\frac{117\pi}{4}$

2) наименьший корень уравнения x(lg5 – 1)lg(2^x+1) – lg6

3) произведение корней уравнения $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14\lg x+15$

4) среднее арифметическое корней уравнения $\log_{x^2-1}(x^3+6) = \log_{x^2-1}(4x^2-x)$

5) произведение корней уравнения $\log_{x^2-8}(4-x)^6 = \log_8(4-x)^6$

6) произведение корней уравнения $x^{4-\log_3 x} = 9$

Задание 17. Найдите…

1) сумму корней уравнения

$\log_{x+19}(2x^2+36x+1) = \log_4 8 + \cos^2\frac{117\pi}{4}$

2) наименьший корень уравнения x(lg5 – 1)lg(2^x+1) – lg6

3) произведение корней уравнения $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14\lg x+15$

4) среднее арифметическое корней уравнения $\log_{x^2-1}(x^3+6)=\log_{x^2-1}(4x^2-x)$

5) произведение корней уравнения $\log_{x^2-8}(4-x)^6=\log_8(4-x)^6$

6) произведение корней уравнения $x^{4-\log_3 x}=9$

Пример 30. Найдите положительный корень уравнения $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3+\log_2 1$.

Решение. Применив свойства логарифма, получим уравнение, равносильное данному: $(2x-1)(x-2)=8$.

$2x^2-5x+-5=0$; D=65; $x_1=\frac{5+\sqrt{65}}{4}$; $x_2=\frac{5-\sqrt{65}}{4}$.

Положительным является корень $x_1=\frac{5+\sqrt{65}}{4}$.

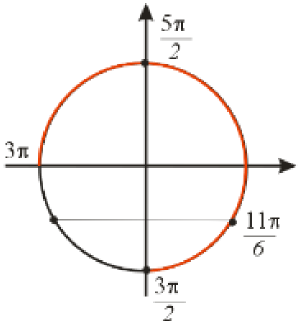
Ответ: $\frac{5+\sqrt{65}}{4}$

Пример22. Решите уравнение $\log_2(\cos x+\sin 2x+8)=3$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Решение. Из данного уравнения получаем: $\log_2(\cos x+\sin 2x+8)=3 \Leftrightarrow \cos x+\sin 2x+8=8 \Leftrightarrow \cos x+\sin 2x=0 \Leftrightarrow \cos x+2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow$

$$\cos x(1+2\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\\ x=(-1)^k(-\frac{\pi}{6})+\pi k, k\in Z\end{array}\right.$$.

С помощью числовой окружности найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$:



Получим числа: $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k; (-1)^k(-\frac{\pi}{6})+\pi k, k\in Z\right\}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$

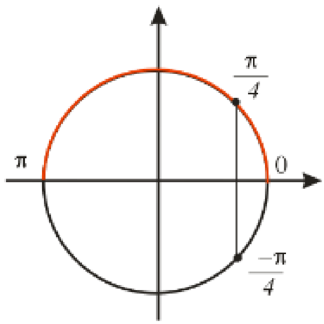
Пример 32. Решите уравнение $2\log_2^2(2\cos x)-5\log_2(2\cos x)+2=0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[0;\pi]$.

Решение. По определению логарифма $\cos x>0$.

Решим квадратное уравнение относительно $\log_2(2\cos x)$: $D=9$; $\log_2(2\cos x)=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$; $\log_2(2\cos x)=\frac{5+3}{4}=2$.

$\log_2(2\cos x)=\frac{1}{2}$; $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$. С учетом $\cos x>0$: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$. $\log_2(2\cos x)=2$; $\cos x=2$ - нет решений.

Найдём корни, лежащие на отрезке $[0;\pi]$:



Получим число: $\dfrac{\pi}{4}$.

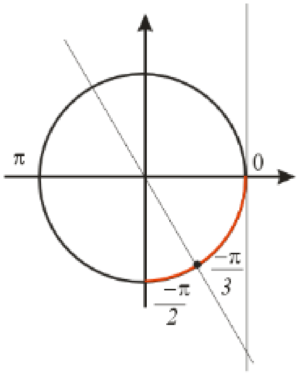
Ответ: $\left\{x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z\right\}$; $\dfrac{\pi}{4}$

Пример 33. Решите уравнение $\dfrac{(tgx+\sqrt{3})\log_3(2\sin^2 x)}{\log_5(\sqrt{2}\cos x)}=0$. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[0;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение. С учетом области определения логарифма получаем: $\dfrac{(tgx+\sqrt{3})\log_3(2\sin^2 x)}{\log_5(\sqrt{2}\cos x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} tgx+\sqrt{3}=0, \\ 2\sin^2 x=1, \end{array}\right. \\ \sin x\neq 0, \\ \cos x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} tgx=-\sqrt{3}, \\ \cos x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z, \\ \cos x>0 \end{cases}$.

Найдем корни, лежащие на отрезке $\left[0;-\dfrac{\pi}{2}\right]$:



На указанном отрезке всего один корень $-\dfrac{\pi}{3}$

Ответ: а) $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z\right\}$ б) $-\dfrac{\pi}{3}$

Задание 18. Найдите положительный корень уравнения

1) $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1$

2) $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$

3) $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1$

4) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$

5) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$

6) $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$

Пример 34. Решите уравнение

.$\log_3(2\sin x+\cos x)-\log_3\cos x=0$

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$\dfrac{2\sin x+\cos x}{\cos x}=1$; $2\operatorname{tg}x+1=1$; $\operatorname{tg}x=0$. $x=\pi k, k\in Z$.

Ответ: $x=\pi k, k\in Z$

Задание 12. Решите уравнение

1) $\log_2(3\sin x-\cos x)+\log_2\cos x=0$

2) log(3sinx – cosx) = -logcosx

4) $\log_2(\cos x - \sin x) + \log_2 \sin x = 2$

5) $\log_{0,1}\sin 2x + \lg\cos x = \lg 7$

6) $\log_3(2\cos x - \sin x) = \log_3 \cos x$

Уравнения с параметром

Пример 1. При каких значениях параметра *a* уравнение $\log(4^x + 8a^2) = x$

имеет два различных корня?

Решение. По определению логарифма $2^x = 4^x + 8a^2$

$2^{2x} - 2^x + 8a^2 = 0$- это показательное уравнение сводится к квадратному и имеет два различных корня, если *D*>0.

$D = 1 - 32a^2 > 0$. Решая это неравенство, получаем $16a^2 < 1$; $a^2 < \frac{1}{16}$.

Отсюда $-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4}$.

Ответ: $[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}]$

Пример 2 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^3 + 2x^2 - x\log_2(a-1) + 4 = 0$ имеет единственное решение на отрезке $[-1; 2]$.

Решение. Пусть $\log_2(a-1) = b$. Рассмотрим уравнение $x^3 + 2x^2 - xb + 4 = 0$. Число $x = 0$ не является корнем этого уравнения ни при каком значении параметра b. Поэтому это уравнение равносильно уравнению $b = x^2 + 2x + \frac{4}{x}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 2x + \frac{4}{x}$ и для уравнения $f(x) = b$ определим число корней и их расположение для каждого значения параметра b.

$$f'(x)=2x+2-\frac{4}{x^2}=\frac{2(x-1)(x^2+2x+2)}{x^2}$$. Отсюда следует, что на промежутках $(-\infty;0),(0;1]$ функция убывает, а на промежутке $[1;+\infty)$ возрастает. Следовательно, точка $x=1$ точка минимума, а минимум равен 7.

Из полученных свойств функции следует, что при любом значении b данное уравнение имеет ровно один отрицательный корень, и поскольку $f(-1)=-5$, то при $b\leq-5$ уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[-1;2]$; при $-5<b<7$ уравнение не имеет корней на $[-1;2]$.

При $b=7$ уравнение имеет единственный корень $x=1$ на отрезке $[-1;2]$.

Поскольку $f(2)=10$, то при $7<b\leq10$ на отрезке уравнение имеет ровно два корня. При $b>10$ уравнение также имеет единственный корень на отрезке.

$\log_2(a-1)\leq-5$, $1<a\leq\frac{33}{32}$; $\log_2(a-1)=7$, $a=129$; $\log_2(a-1)>10$, $a>1025$.

Ответ: $(1;\frac{33}{32})\cup\{129\}\cup(1025;+\infty)$

Пример 3. Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_{x+1}(a+x-6)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1;1]$.

Решение. Уравнение $\log_{x+1}(a+x-6)=2$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+x+7-a=0, \\ x>-1, \\ x\neq0 \end{cases}.$$

Эта система имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку если уравнение $\log_{x+1}(a+x-6)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий либо промежутку $(-1;0)$, либо промежутку $(0;1]$.

Поскольку графиком функции $f(x)=x^2+x+7-a$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $x=-0,5$, уравнение $x^2+x+7-a=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1;0)$ при условии $\begin{cases} f(-0,5)<0, \\ f(-1)=f(0)>0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6,75-a<0, \\ 7-a>0 \end{cases}$; $6,75<a<7$.

Уравнение $x^2+x+7-a=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(0;1]$ при условии $\begin{cases} f(0)<0, \\ f(1)\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 7-a<0, \\ 9-a\geq 0 \end{cases}$; $7<a\leq 9$.

Ответ: $(6,75;7)\cup(7;9]$

Задание13. При каких значениях параметра *а*…

1) графики функций y = 9^x и y = $\log_a(-x)$ пересекаются в точке с абсциссой x= - 1/2

2) графики функций y = 4^x и y = $\log_a x$ пересекаются в точке с абсциссой x=1/2

3) графики функций y = 25^x и y=$\log_a(-x)$ пересекаются в точке с абсциссой x= - 1/2

4) уравнение $\log(9^x+9a^3)=x$ имеет два различных корня

5) графики функций y = 4^x и y =log(-x) пересекаются в точке с абсциссой x= - 1/2

6)$\lg(x^2+2ax)-\lg(8x-6a-3)=0$ уравнение имеет единственное решение

7) уравнение $\lg(x^2+ ax) = \lg (4x – a -4)$ имеет единственное решение

8) уравнение $\log(x + a) = 1$ не имеет решений

9) уравнение $2\lg(x+ 3)= \lg(ax)$ имеет единственное решение.

Заключение

В школьном курсе математике изучаются логарифмические уравнения и неравенства и способы их решения очень сжато. Потребности учебного процесса требуют от учеников больших знаний и умений. В материалах ЕГЭ и на олимпиадах часто встречаются задания с логарифмическими уравнениями и неравенствами. В своей работе мы рассмотрели различные методы решений логарифмических уравнений и неравенств: использования определения логарифма, потенцирования, перехода к одному основанию, логарифмирования, функционально - графический, рационализации, использования свойств логарифмической функции. Результаты данной работа могут быть использованы при подготовке к выпускным и вступительным экзаменам, и на факультативных занятиях для расширения математического кругозора учащихся.

Перечень рекомендуемых учебных изданий, дополнительной литературы, Интернет-ресурсов.

Основные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: учеб.для студ. Учреждений сред. Проф. Образования / - 5-е изд., стер. - М.: Издательский центр "Академия" , 2018.-256с.
2. Математика: задачник: учеб. пособие для студ.учреждений сред.проф.образования / М.И. Башмаков.- 5-е изд., стер.- М.: ИЦ "Академия" 2018.-416с.
3. Математический практикум по курсу «Математика». 11 класс: [12+] / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова, А.А. Никитина. – Москва: Русское слово — учебник, 2017. – 145с. – (Инновационная школа). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=486029 – ISBN 978-5-533-00334-6.

Дополнительные источники:

1. Математический практикум по курсу «Математика». 10 класс: контрольно-измерительные материалы/ В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В.Козлова, А.А.Никитина - Москва: Русское слово – учебник, 2016. – 161с. [Электронный ресурс]-URL: http:/biblioclub.ru/index.php?page=book&id=486028
2. Математический практикум по курсу «Математика». 11 класс: контрольно-измерительные материалы/ В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др; под ред. В.В.Козлова, А.А.Никитина - Москва: Русское слово – учебник, 2017. – 145с. - [Электронный ресурс] URL: http:/biblioclub.ru/index.php?page=book&id=486029
3. Барвенов С.А. Математика: супертренинг для подготовки к тестированию и экзамену : [12+] / С.А. Барвенов. – Минск: Тетралит, 2018. – 112с.: табл. – Режим доступа: по подписке. – URL:https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571630. – ISBN 978-985-7171-17-0.

Интернет-ресурсы:

1. Булгаков Н.А., Осипова И.А. Основные законы и формулы по математике и физике. Режим доступа: [http://window.edu.ru/resource/797/56797 12.05.2020].
2. Вся математика. Режим доступа: [http://www.allmath.ru 16.05.2020].
3. Математика – это просто. Режим доступа: [http://easymath.com.ua 16.05.2020].
4. Материал по различным разделам математики. Режим доступа: [http://www.mathematics.ru 12.05.2020].
5. Прикладная математика: справочник математических формул. Режим доступа: [http://www.pm298.ru/ 12.05.2020].
6. Справочник по школьной математике. Режим доступа: [http://www.terver.ru 12.05.2020].